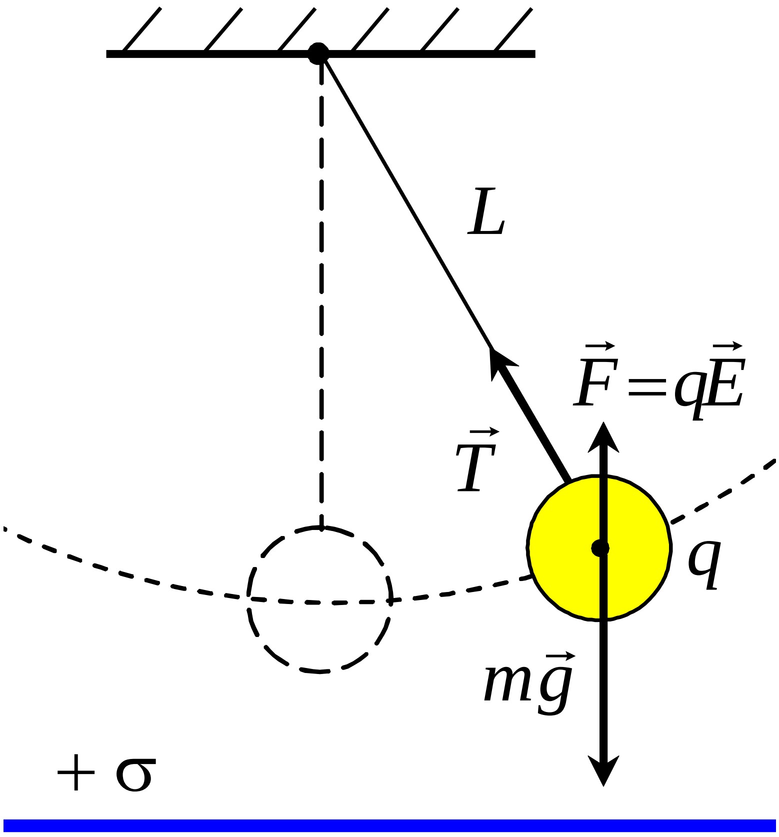
Курс лекций по физике

А. Б. Климовский

Механика
Электричество



Ульяновск 2005

Федеральное агентство по образованию
Ульяновский государственный технический университет

А. Б. Климовский

Курс лекций по физике

Часть 1

Механика. Электричество

Для студентов заочно-вечерней формы обучения

Издание четвертое, исправленное

Рекомендовано Учебно-методическим объединением высших учебных заведений Российской Федерации по образованию в области радиотехники, электроники, биомедицинской техники и автоматизации в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по направлениям 551100 и 654300 «Проектирование и технология электронных средств» и специальностям 200800 «Проектирование и технология радиоэлектронных средств» и 220500 «Проектирование и технология электронно-вычислительных средств»

Ульяновск 2005

УДК 53 (075)
ББК 22.3я7
К49

Рецензенты: доцент кафедры общей физики УлГПУ
В. П. Бондина
доцент кафедры экспериментальной физики УлГУ
А. П. Балашов

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

Климовский А. Б.
К49 Курс лекций по физике. Часть 1. Механика. Электричество.– 4-е изд., испр.– Ульяновск : УлГТУ, 2005. – 92 с.
ISBN 5-89146-6

Составлен в трех частях в соответствии с программой по физике для студентов заочно-вечернего факультета УлГТУ. Во первой части излагаются вопросы механики и электричества. Подготовлен на кафедре физики Ульяновского государственного технического университета. Предназначен для студентов технических вузов.

УДК 53 (075)
ББК 22.3я7

ISBN 5-89146-6

Указания для студентов

1. Курс физики состоит из трех частей. Каждая часть курса разбита на разделы, которые содержат несколько тем. Каждый раздел рассчитан на целое число лекций, каждая тема – на целое число часов (полулекций).
2. В начале каждой темы приведен перечень вопросов, которые рассмотрены в данной теме. Эти вопросы включены в качестве теоретических вопросов в билеты на экзамен или зачет, которым заканчивается изучение каждой части курса.
3. Основные определяемые понятия выделены в тексте **п р я м ы м п о л у ж и р н ы м ш р и ф т о м в р а з р я д к у**. Текст определений выделен *курсивом*.
4. Основные формулы определений и полученные выражения, записанные в их окончательном виде, выделены рамкой (например, $\boxed{m\vec{a} = \vec{F}}$).
5. Условия, определяющие справедливость приведенных выражений, выделены ***полужирным курсивом***.
6. Важные термины там, где они рассматриваются впервые, выделены **прямым полужирным шрифтом**. Прочие термины и условия, на которые следует обратить внимание, выделены *курсивом*.
7. В приложении приведен номер и название КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ, которая должна быть выполнена в данной части курса, и СПИСОК ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ, из которого необходимо выполнить назначенные преподавателем работы.
8. В приложении приведен СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ, к которой можно обратиться для более глубокого изучения материала, а также при подготовке к контрольным работам и выполнению лабораторных работ.

Введение

При подготовке квалифицированных специалистов большую роль играют фундаментальные науки, в частности физика.

Главная цель любой науки, в том числе и физики, рассматривается обычно как приведение в систему сложных явлений, регистрируемых в окружающем мире нашими органами чувств. Проще говоря, целью науки является получение знаний, понимаемых как структурированная, систематизированная информация. В соответствии с этим физика как наука представляет собой, с одной стороны, совокупность знаний, а именно физических знаний, то есть «разложенную по полочкам информацию», и инструмент получения этих знаний – инструмент для «создания новых полочек», с другой стороны.

Поэтому изучение физики выполняет двойную функцию, во-первых, – это формирование правильного физического мировоззрения, и, во-вторых, – создание фундаментальной базы теоретической подготовки, без которых невозможна успешная деятельность специалиста. Первая функция – *содержательно-мировоззренческая,* – может быть реализована при знакомстве с физическими моделями объектов и процессов реального мира, с физическими теориями, в которых, пользуясь модельными представлениями, описываются явления окружающего мира, и с законами физики, отражающими общее в характеристиках происходящих явлений. Вторая функция – *познавательно-методологическая*, способствующая развитию мышления, реализуется в знакомстве и освоении логики и технологии познавательного процесса на примерах лучших образцов научной мысли, созданных в процессе кропотливой многовековой работы огромного числа физиков-исследователей и обобщенных гениальными умами человечества.

Изучение физики имеет наибольшую ценность и дает наилучший результат, когда обе эти функции выполняются в неразрывном единстве. То есть, пользуясь уже упомянутой аналогией, когда «раскладывание по полочкам» приводит к созданию «новых полочек», образование которых вынуждает «перекладывать уже разложенное».

Чтобы оба процесса были эффективными, полезно познакомиться с принципиальной структурой знаний в физике.

Базовыми элементами, отправными точками являются **физические модели объектов и явлений**, под которыми понимают *мысленный идеализированный образ объекта или явления, отражающий в упрощенном виде интересующие свойства реального объекта или явления*. Например, модель материальной точки в качестве модели тела, применяемая, когда размеры тела несущественны. Или волновая модель света, основанная на результатах опытов, которые указывают на большое сходство света с волнами на воде, хотя световые волны нельзя наблюдать, как волны на воде.

Не следует смешивать понятие модели с реальной системой или явлением. Модель всегда относительно проста и сохраняет только структурное сходство с изучаемым явлением. Ни одна модель не безупречна, по мере получения новых сведений о явлении модель уточняется или заменяется на новую.

Когда *физическая модель явления получает достаточное развитие, усложняется, становится более детальной и описывает не одно явление, а широкий круг явлений*, ее обычно называют **физической теорией**. Например, волновая теория света, которая описывает ряд световых явлений, в частности, дифракцию световых волн и их интерференцию.

Любая теория должна подтверждаться экспериментом. Но это не значит, что теорию можно «доказать» экспериментально. Во-первых, абсолютно точное измерение невозможно, в любом случае мы можем получить только оценку измеряемой величины с той или иной точностью, в то время как теория содержит точные утверждения. Во-вторых, невозможно проверить теорию во всех конкретных ситуациях.

Сами теории также не являются совершенными, они имеют границы применимости, причем даже в их рамках теории редко согласуются точно (в пределах точности эксперимента) с результатами наблюдений в каждом конкретном случае, в котором их проверяют. Созданные теории, отслужив свой срок, заменяются новыми, предсказания которых лучше количественно согласуются с экспериментом и, как правило, позволяют объяснить более широкий класс явлений. Старые теории или сохраняют исторически-познавательное значение, например, атомная теория Бора, или используются в границах применимости, определенных новой теорией, например, классическая механика Ньютона.

Новые теории обычно находятся не только в лучшем количественном соотношении с опытом, они нередко существенно изменяют понимание физического мира. Например, после создания специальной теории относительности принципиально изменились представления о пространстве и времени, появилось осознание связи между понятиями массы и энергии.

Важную роль в установлении и применении физических теорий играют **физические законы**, представляющие *краткие, но достаточно общие утверждения относительно характера явления*. Законы часто принимают форму соотношения между описывающими явления величинами, например, закон всемирного тяготения.

Физический закон обобщает результат многих наблюдений. Так же, как теории, законы не могут быть абсолютно справедливы, у каждого есть ограничения. При получении новых результатов некоторые законы могут быть видоизменены или даже отброшены. Поэтому не прекращается работа по уточнению, казалось бы, твердо установленных законов. Например, к настоящему времени известно, что показатель степени расстояния в знаменателе закона Кулона равен $2 \pm 2 \cdot 10^{-16}$, то есть он не отличается от «2», по крайней мере, до 16-го знака после запятой. Это, во-первых, определяет точность выполнения самого закона, а, во-вторых, подтверждает справедливость других законов. Если окажется, что показатель степени, начиная с некоторого знака, отличается от «2», то это приведет к принципиальному пересмотру ряда теорий.

С развитием моделей, усложнением теорий, установлением новых законов физика охватывает все более широкий круг явлений, вторгаясь в пограничные области знаний. Так возникли и успешно развиваются астрофизика, геофизика, физическая химия, биофизика и др. Границы физических представлений в последнее время существенно расширились.

В настоящее время, строго говоря, **физикой** считают *науку, изучающую простейшие и вместе с тем наиболее общие свойства материального мира*. Изучаемые физикой явления (механические, тепловые и др.) присутствуют во всех более сложных явлениях (химических, биологических и др.). Поэтому они, будучи наиболее простыми, являются наиболее общими.

Физика как область знаний не является перечнем однотипных знаний. Она включает в себя много разделов, отличающихся по изучаемым объектам (физика элементарных частиц и ядра, физика атомов, молекул, твердого тела и др.), по изучаемым свойствам объектов (механика, электродинамика, термодинамика и т. д.), по методам и способам изучения (термодинамика и молекулярно-кинетическая теория и т. п.).

Мы в нашем курсе начнем с простых моделей, с каждой темой включая в рассмотрение новые свойства явлений, что будет приводить сначала к постепенному, а затем к принципиальному усложнению используемых моделей и изучаемых теорий. Где это возможно, мы будем следовать историческому изменению физической картины мира, проходя путь, по которому шла физика в своем развитии.

Изучать физические явления мы будем, рассматривая их на лекциях, выполняя лабораторные работы и решая задачи контрольных работ.

Лекционный курс построен в соответствии с рабочей программой курса физики для студентов заочно-вечернего факультета УлГТУ, что отражено в настоящем курсе лекций. Занятия по физике на заочно-вечернем факультете продолжаются в течение трех семестров, в соответствии с этим курс лекций состоит из трех частей. *В первую часть* включены два больших раздела – ***физические основы механики*** и ***электричество***. *Во второй части* рассмотрены три раздела – ***электромагнетизм, физика волновых процессов*** и ***квантовая физика***. *В третьей части* – оставшиеся разделы курса – ***статистическая физика и термодинамика, элементы физики твердого тела*** и ***физика атомного ядра и элементарных частиц***. Каждый раздел состоит из нескольких тем, каждая тема снабжена перечнем вопросов, которые в ней рассмотрены и будут включены в билеты экзамена или зачета.

Выполнение лабораторных работ позволит дополнить теоретический материал знакомством на практике с основными физическими явлениями и понятиями соответствующих разделов, а также познакомиться с техникой физического эксперимента.

Решение задач в контрольных работах даст возможность применить полученные знания в простейших модельных ситуациях и глубже усвоить изучаемый материал.

Физические основы механики

Часть физики, изучающая механическое движение тел, называется **механикой**. Основные законы механики установлены Галилео Галилеем (G. Galilei 1564–1642) и окончательно сформулированы Исааком Ньютоном (I. Newton 1643–1727). Механику Гилилея–Ньютона называют **классической механикой**. В ней изучаются законы движения макроскопических тел (это все окружающие нас тела) со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света. Более общей теорией, в которой описываются и микроскопические тела (например, элементарные частицы) является, **квантовая механика**. С ней мы познакомимся в последней части нашего курса. Движение макроскопических тел с любыми скоростями, в том числе и со скоростями, сравнимыми со скоростью света, рассматривает **релятивистская механика**, основные понятия которой мы рассмотрим в конце этой части. Начнем первую часть курса физики мы с классической механики Галилея–Ньютона.

Тема: **Кинематика материальной точки**

Вопросы:
1. *Понятие механического движения. Модель материальной точки.*
2. *Система отсчета. Траектория движения.*
3. *Кинематические характеристики движения. Радиус-вектор, перемещение, вектор скорости, вектор ускорения.*
4. *Кинематические уравнения прямолинейного равномерного движения.*
5. *Кинематические уравнения равноускоренного движения.*
6. *Равномерное вращение. Угловые переменные.*
7. *Связь кинематических характеристик поступательного и вращательного движений.*
8. *Неравномерное вращение. Ускорения.*
9. *Криволинейное движение. Общий случай.*

Механическим движением называют *изменение с течением времени положения тела в пространстве*.

Основными видами механического движения являются ***поступательное и вращательное движения***.

Поступательным движением называется *движение, при котором любая прямая, связанная с движущимся телом, остается параллельной самой себе*. При поступательном движении все точки тела движутся одинаково, поэтому можно рассматривать движение тела независимо от его размеров и формы, как движение одной точки тела.

Вращательным движением называют *движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения*.

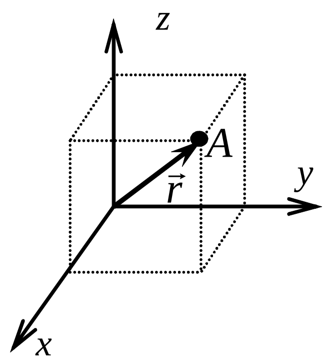
Раздел физики, в котором механическое движение изучается без рассмотрения причин, определяющих характер движения, называется **кинематикой**. Основная задача кинематики – определение положения тела в пространстве и характеристик его движения в любой момент времени. Другими словами, в кинематике описывают движение, какое оно есть, не задаваясь вопросом: «Почему движение именно такое?»

В физике мы имеем дело не с реальными телами, а с их физическими моделями.

Простейшей моделью тела является материальная точка. **Материальной точкой** называется *обладающее массой тело, размерами которого можно пренебречь в данной задаче*. Если размерами тела пренебречь нельзя, то его можно представить как *совокупность материальных точек, рассматриваемых как единое целое*, – то есть как **систему материальных точек**. В процессе движения расстояние между точками, составляющими тело, может меняться – в этом случае говорят о деформации тела. Если при рассмотрении движения деформация тела незначительна (ею можно пренебречь), тогда в качестве модели тела можно использовать модель абсолютно твердого тела. **Абсолютно твердым телом** называется *тело, расстояние между двумя любыми точками которого не изменяется.* Поступательное движение абсолютно твердого тела можно описывать как движение одной материальной точки.

Мы начнем изучение описания механического движения, используя простейшую модель – **модель материальной точки**, имея в виду, что, либо размерами тела можно пренебречь, либо тело является абсолютно твердым и участвует только в поступательном движении. Далее рассмотрим систему материальных точек, когда размерами тел не будем пренебрегать, и закончим раздел механикой абсолютно твердого тела, в которой рассмотрим вращательное движение абсолютно твердого тела.

Для описания механического движения (изменения положения тела) нужно прежде всего уметь определять положение тела. Для этой цели вводят систему отсчета. **Системой отсчета** называют *тело отсчета, относительно которого определяется положение всех других тел, и связанные с этим телом часы*. В системе отсчета обычно пользуются системой координат. Наиболее распространенной системой координат является декартова система XYZ.



Для определения положения материальной точки введем **радиус-вектор материальной точки** $\vec{r}$ *– вектор, проведенный из начала отсчета (начала системы координат) в рассматриваемую материальную точку*. Проекции радиус-вектора на оси OX, OY, OZ равны декартовым координатам точки

$$r_x \equiv x,\ r_y \equiv y,\ r_z \equiv z.$$

При движении точка (конец радиус-вектора) описывает некоторую линию – **траекторию движения**. Когда проводим мелом по доске, на ней остается след – траектория движения кончика мела. **Траектория движения материальной точки** – *линия, представляющая собой совокупность точек, через которые прошла материальная точка в процессе ее движения*. В зависимости от формы линии траектория может быть прямолинейной или криволинейной.

Для описания движения введем *физические величины, которыми будем характеризовать движение*. Они называются **кинематическими характеристиками**.

Путь s, пройденный материальной точкой, равен *длине участка траектории, который прошла точка за данный промежуток времени*. По определению путь – скалярная величина.

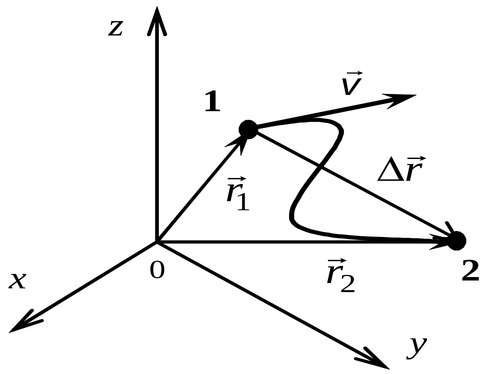
Перемещение $\Delta\vec{r}$ за время Δt *– направленный отрезок, соединяющий некоторое положение точки с ее положением спустя время* Δt. Перемещение – векторная величина. Перемещение по определению есть приращение радиус-вектора

$$\boxed{\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1}.$$

Если нам известен радиус-вектор $\vec{r}$ материальной точки в любой момент времени, то есть, если мы знаем векторную функцию $\vec{r}(t)$ или, что полностью эквивалентно, три скалярные функции – координаты точки $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, мы полностью можем описать ее движение.

Однако для удобства описания движения вводят *производные характеристики движения*. В частности, удобно знать, как быстро радиус-вектор $\vec{r}(t)$ изменяется со временем, то есть знать скорость движения материальной точки. Быстрота изменения любой функции, зависящей от времени, определяется ее производной по времени. В обыденной жизни под скоростью понимают путь, проходимый частицей за единицу времени. Это есть производная пути по времени $v = \dfrac{ds}{dt}$. В физике чаще всего под скоростью понимают производную радиус-вектора $\vec{r}(t)$ по времени t. Поскольку радиус-вектор – это вектор, то и его производная является векторной величиной, которая характеризует не только быстроту движения частицы по траектории, но и направление, в котором движется частица каждый момент времени.

Вектор мгновенной скорости (мгновенная скорость) *в момент времени* t *является, по определению производной, пределом отношения перемещения ко времени перемещения* Δt *при стремлении* Δt *к нулю, то есть отношение бесконечно малого перемещения* $d\vec{r}$ *к бесконечно малому времени этого перемещения* dt



$$\boxed{\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}}.$$

Вектор мгновенной скорости по определению есть перемещение в единицу времени, и он всегда направлен по касательной к траектории.

Вектором средней скорости $\langle\vec{v}\rangle$ *называется отношение конечного перемещения ко времени этого перемещения*

$$\boxed{\langle\vec{v}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}}.$$

Скорость материальной точки $\vec{v}$ может изменяться со временем как по величине, так и по направлению. Быстрота изменения вектора $\vec{v}$ – это также векторная величина, равная *производной скорости* $\vec{v}$ *по времени, которая называется* **мгновенным ускорением**. По определению **вектор мгновенного ускорения**

$$\boxed{\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \dot{\vec{v}} \equiv \ddot{\vec{r}}}.$$

Мгновенное ускорение является второй производной от радиус-вектора по времени.

Среднее ускорение является отношением конечных приращений

$$\boxed{\langle\vec{a}\rangle = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}}.$$

Рассмотрим частные случаи движения материальной точки, определяемые свойствами кинематических характеристик, и получим для этих случаев **кинематические уравнения** – *зависимости кинематических характеристик от времени*.

1. Равномерное прямолинейное движение $\vec{v} = const$, $\vec{a} = 0$

По определению $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ или $d\vec{r} = \vec{v}dt$. Интегрируя левую часть от $\vec{r}_0$ до $\vec{r}(t)$ и правую часть от $t = 0$ до t, $\int\limits_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int\limits_0^t \vec{v}dt$, получаем $\vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \vec{v}t$, или

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t}.$$

Полученная зависимость радиус-вектора от времени вместе с выражениями $\vec{v} = const$, $\vec{a} = 0$ представляют собой **кинематические уравнения прямолинейного равномерного движения** в векторном виде. Если ось OX направить вдоль направления скорости (вдоль траектории, которая прямолинейна), то уравнение для радиус-вектора в проекции на эту ось будет иметь вид $x(t) = x_0 + vt$, а путь, пройденный телом к моменту времени t, будет определяться хорошо известным выражением $s = vt$.

2. Равноускоренное движение $\vec{a} = const \neq 0$

По определению $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$ или $d\vec{v} = \vec{a}dt$. Интегрируя $\int\limits_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \int\limits_0^t \vec{a}dt$, получаем: $\vec{v}(t) - \vec{v}_0 = \vec{a}t$ или $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t$. Далее учтем, что $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, следовательно, $d\vec{r} = \vec{v}dt = (\vec{v}_0 + \vec{a}t)dt$. Интегрируя левую и правую части, получим

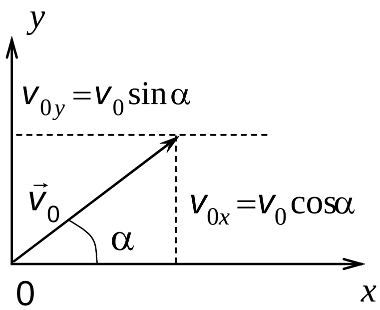
$$\vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}.$$

Таким образом, в векторной форме **кинематические уравнения равноускоренного движения** имеют вид

$$\boxed{\vec{a} = const,\ \ \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t,\ \ \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}}.$$

Примером равноускоренного движения является *баллистическое движение* без учета сопротивления воздуха – свободное движение тел в поле силы тяжести. Если ось OY направить вертикально вверх, а ось OX – горизонтально, то в проекциях на эти оси кинематические уравнения примут вид:

$$a_x = 0, \qquad a_y = -g;$$
$$v_x = v_{0x}, \qquad v_y = v_{0y} - gt;$$
$$x = x_0 + v_{0x}t, \qquad y = y_0 + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}.$$

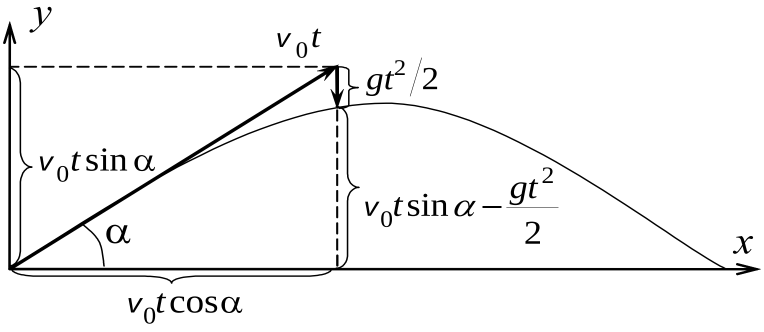


Для тела, брошенного с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту из начала координат, кинематические уравнения запишутся в виде

$$x = v_0 t \cos\alpha \text{ и } y = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Траектория движения будет параболой, описываемой уравнением

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2.$$

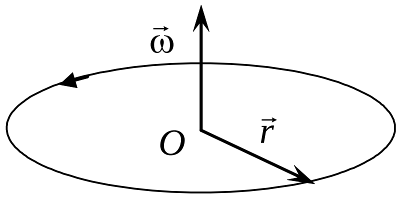


Из кинематических уравнений могут быть получены параметры полета тела: время полета t_m, высота подъема h_m, дальность полета s_m:

$$t_m = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}, \; h_m = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}, \; s_m = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

3. Движение по окружности

Описание движения материальной точки по окружности даже с постоянной по величине скоростью с помощью введенных кинематических характеристик довольно сложно, поскольку ни ускорение, ни скорость при этом не являются постоянными величинами, так как меняют свое направление ($\vec{a} \neq const$, $\vec{v} \neq const$). В то же время само движение довольно простое и должно быть какое-нибудь простое его описание. Действительно, описание вращения будет простым, если ввести **угол поворота** φ, как *характеристику положения материальной точки*. Тогда скоростью будет скорость вращения, которая определяется как *угол поворота в единицу времени* и называется **мгновенной угловой скоростью** ω. Угловая скорость равна *производной угла по времени*



$$\boxed{\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \equiv \frac{d\varphi}{dt}} \text{ или в векторном виде } \boxed{\vec{\omega} = \frac{\overrightarrow{d\varphi}}{dt} \equiv \dot{\vec{\varphi}}}.$$

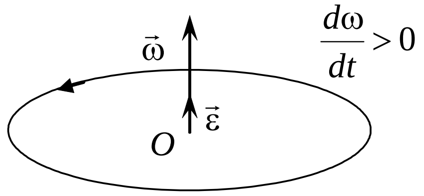
Здесь мы используем то, что бесконечно малый угол $d\varphi$ можно рассматривать как вектор $\overrightarrow{d\varphi}$, модуль которого равен углу $d\varphi$, а направление совпадает с поступательным движением правого буравчика при его повороте по направлению вращения (определяется по правилу правого буравчика). Вектор $\vec{\omega}$ направлен в ту же сторону по оси вращения, что и $\overrightarrow{d\varphi}$.

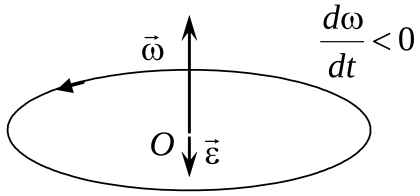
Важно отметить, что угол φ измеряется в **радианах**. По определению единицы измерения угла ***1 радиан*** *– это угол, который вырезает на окружности дугу, равную радиусу*. Радиан является безразмерной величиной.

Так же, как мы поступали раньше, введем **мгновенное угловое ускорение** $\vec{\varepsilon}$ *– скорость изменения угловой скорости*

$$\boxed{\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{\omega}}{dt} \equiv \dot{\vec{\omega}}}.$$

При ускоренном движении угловое ускорение совпадает по направлению с угловой скоростью, $\vec{\varepsilon} \uparrow\uparrow \vec{\omega}$. При замедленном вращении угловое ускорение направлено в противоположную относительно угловой скорости сторону, $\vec{\varepsilon} \uparrow\downarrow \vec{\omega}$.





Введенные ранее характеристики $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$, $\vec{a}(t)$ называют **линейными**, в отличие от введенных здесь **угловых переменных (характеристик)**.

При равномерном движении материальной точки по окружности **кинематические уравнения в угловых переменных** будут иметь вид

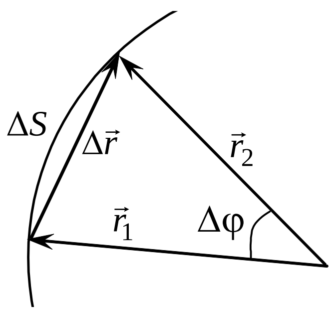
$$\boxed{\varepsilon = 0, \;\; \omega = const, \;\; \varphi(t) = \varphi_0 + \omega t}.$$

При движении материальной точки по окружности с постоянным угловым ускорением **кинематические уравнения** будут иметь вид, аналогичный прямолинейному равноускоренному движению (процедура получения уравнений одинаковая)

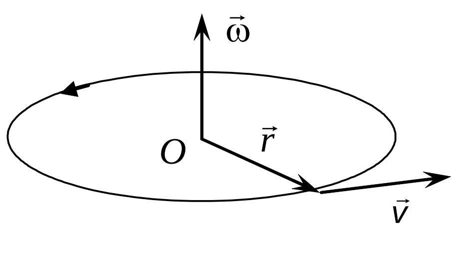
$$\boxed{\varepsilon = const, \;\; \omega(t) = \omega_0 + \varepsilon t, \;\; \varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}}.$$

Очевидно, что угловые переменные, введенные для вращения, и линейные переменные должны быть связаны друг с другом, так как с помощью тех и других можно описать одно и то же движение. Найдем эту связь.

По определению единицы измерения угла – **радиана**, *дуга* S *окружности связана с радиусом окружности* R *соотношением* $S = \varphi R$ *или для приращений* $\Delta S = \Delta\varphi \cdot R$.



По определению величина скорости (модуль вектора скорости) равна $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}$. При $\Delta t \to 0$ длина хорды $|\Delta\vec{r}|$ стремится к длине дуги ΔS, то есть $|\Delta\vec{r}| \to \Delta S$, или $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$. Тогда $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} R = \omega R$.



Окончательно получаем $\boxed{v = \omega R}$, то есть связь между скоростями имеет такой же вид, как связь между S и φ: $S = \varphi R$.

В векторном виде, с учетом направлений векторов, можем записать

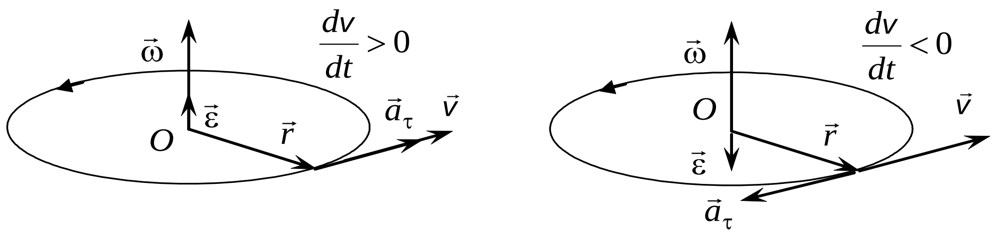
$$\boxed{\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}\,]},$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки относительно центра вращения, его величина равна радиусу окружности, $|\vec{r}| = R$. Мы здесь использовали символическую запись векторного произведения $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

Теперь найдем связь между ускорениями. По определению $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$, а поскольку $\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$, то $\vec{a} = \dfrac{d}{dt}[\vec{\omega}, \vec{r}] = [\dfrac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{r}] + [\vec{\omega}, \dfrac{d\vec{r}}{dt}] = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}] + [\vec{\omega}, \vec{v}]$.

Первое слагаемое $[\vec{\varepsilon}, \vec{r}]$ направлено по скорости, если $\vec{\varepsilon} \uparrow\uparrow \vec{\omega}$, и против, если $\vec{\varepsilon} \uparrow\downarrow \vec{\omega}$, то есть всегда параллельно скорости. Естественно, эту часть ускорения называют **тангенциальной составляющей ускорения (тангенциальным ускорением)**

$$\boxed{\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}]}.$$



Величина тангенциальной составляющей ускорения равна $a_\tau = \varepsilon R$. Тангенциальное ускорение *характеризует быстроту изменения вектора скорости по величине*

$$\boxed{a_\tau = \frac{dv}{dt}}.$$

Второе слагаемое $[\vec{\omega}, \vec{v}]$ направлено по радиусу к центру окружности, то есть перпендикулярно скорости. Эту часть ускорения называют **нормальной составляющей ускорения (нормальным ускорением)**

$$\boxed{\vec{a}_n = [\vec{\omega}, \vec{v}]}.$$

Величина нормального (центростремительного) ускорения равна

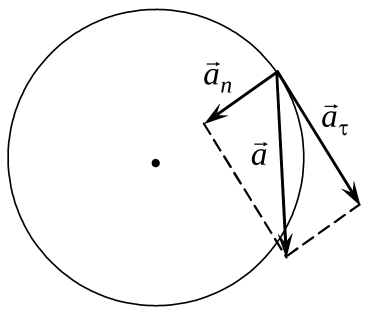
$$a_n = \omega v = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}.$$

Нормальное ускорение *характеризует быстроту изменения вектора скорости по направлению.*

Полное ускорение $\vec{a}$ будет равно векторной сумме нормального и тангенциального ускорений $\boxed{\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n}$.

Нормальное ускорение направлено по радиусу, а тангенциальное – по касательной к окружности, они перпендикулярны друг другу, и величина полного ускорения будет равна

$$\boxed{a = |\vec{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}}.$$



При равномерном вращении тангенциальное ускорение будет равно нулю, полное ускорение будет отлично от нуля и равно постоянному по величине нормальному ускорению.

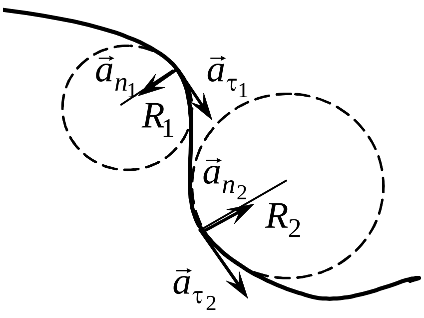
Отметим, что ***при неравномерном вращении*** величина нормального ускорения, $a_n = \dfrac{v^2}{R}$, не будет постоянной. ***В случае равноускоренного вращения*** (с постоянным угловым ускорением) тангенциальное ускорение будет постоянным по величине, $a_\tau = const$, но не по направлению.

Вернемся от описания частных случаев движения к общему случаю произвольного криволинейного движения.

При произвольном движении траектория криволинейная, а скорость непостоянна. В этом случае ускорение тоже можно разложить на нормальную и тангенциальную составляющие

$$\vec{a} = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}] + [\vec{\omega}, \vec{v}] = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n .$$

Нормальная составляющая ускорения $\vec{a}_n = [\vec{\omega}, \vec{v}]$ будет направлена к центру **мгновенной окружности** – *окружности, дуга которой совпадает с траекторией движения материальной точки на бесконечно малом участке, где находится материальная точка в момент времени* t. Величины ускорений будут определяться теми же выражениями $a_\tau = \dfrac{dv}{dt}$ и $a_n = \dfrac{v^2}{R(t)}$. Здесь $R(t)$ – радиус мгновенной окружности или **радиус кривизны траектории**.



Таким образом, произвольное движение может быть рассмотрено как движение по траектории *переменной кривизны*, то есть в отличие от вращения $R(t) \neq const$. На прямолинейном участке траектории $R(t) = \infty$ и, естественно, $a_n = 0$ и $a = a_\tau$.

На примерах рассмотренных случаев движения мы познакомились с принципами описания движения и знаем теперь кинематические уравнения для этих случаев. Мы научились находить кинематические характеристики для простых движений и знаем, как их находить для более сложных движений. На этом закончим кинематическое рассмотрение движения.

Тема: **Динамика материальной точки и поступательного движения твердого тела**

Вопросы:

1. *Законы динамики материальной точки. Понятие о взаимодействии.*
2. *Первый закон Ньютона. Инерциальные системы отсчета.*
3. *Инертная масса. Второй закон Ньютона. Импульс.*
4. *Третий закон Ньютона.*
5. *Система материальных точек. Центр масс.*
6. *Основное уравнение динамики поступательного движения.*
7. *Закон всемирного тяготения. Гравитационная масса. Сила тяжести. Вес. Невесомость.*

В предыдущей теме мы научились описывать движение. В этой теме мы перейдем к изучению и описанию причин, определяющих характер движения, то есть к **динамике**. Начнем мы, как обычно, с самого простого – с **динамики материальной точки**. Далее перейдем к системе материальных точек, затем к модели абсолютно твердого тела и рассмотрим **динамику поступательного движения твердого тела**.

Д и н а м и к о й называют *раздел механики, который изучает движение тел, исходя из причин, влияющих на характер движения*. В динамике ставится вопрос: «Какое будет движение и почему именно такое?».

Причиной, определяющей характер движения и его изменение, является **взаимодействие тел**.

Взаимодействие может осуществляться как

- ***полевое взаимодействие (между удаленными объектами, например, гравитационное);***
- ***контактное взаимодействие (при непосредственном контакте тел, например, трение).***

Полевое взаимодействие обусловлено способностью тел изменять свойства окружающего пространства. Изменение свойств выражается в том, что на удаленные тела действует сила. Принято говорить, что тело создает вокруг себя **п о л е**, которое действует на другие тела. Реально любое взаимодействие является полевым, но некоторые взаимодействия становятся значительными только при сильном сближении (при контакте), в этом случае удобно пользоваться представлениями о *контактном взаимодействии*.

По природе все взаимодействия принято делить на четыре типа:

- ***гравитационное,***
- ***слабое,***
- ***электромагнитное,***
- ***сильное.***

Одной из важных задач, решить которую пытаются физики-теоретики, является создание единой теории, объединяющей все взаимодействия, существующие в природе, в одно. На этом пути достигнуты определенные успехи. С прошлого века мы пользуемся единой теорией электромагнетизма, тогда как первоначально электрические и магнитные взаимодействия рассматривались как имеющие разную природу. В начале 60-х годов нашего века была разработана электрослабая теория, объединившая слабое и электромагнитное взаимодействия, рассматриваемые в ней как два разных проявления одного более фундаментального электрослабого взаимодействия. Несмотря на успехи электрослабой теории и ряда других теорий, единой теории поля в настоящее время не существует. Мы по традиции будем говорить о четырех типах взаимодействия.

О слабом и сильном взаимодействии мы будем говорить в последней, третьей, части нашего курса, поскольку их влияние существенно лишь на расстояниях порядка размера ядра – в ***микромире***. В ***макромире***, который нас окружает, существенными являются только гравитационное и электромагнитное взаимодействия, которые мы и будем рассматривать в первых двух частях курса физики.

Для характеристики взаимодействия используют понятие **силы** $\vec{F}$, которая является *количественной мерой воздействия на тело других тел или полей*. ***Сила*** $\vec{F}$ ***– величина векторная***. Сила полностью определена, если заданы ее величина $|\vec{F}|$, направление и точка приложения.

Опыт показывает, что все известные виды взаимодействия характеризуются действующими на тела силами, зависящими от величин, определяющих состояние тел

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}).$$

Если на материальную точку одновременно действуют несколько сил $\vec{F}_1$, …, $\vec{F}_n$, то их действие эквивалентно действию одной силы $\vec{F}$, равной векторной сумме всех действующих сил

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i .$$

При поступательном движении абсолютно твердого тела действие силы не изменится при переносе точки приложения силы в пределах тела.

В основе динамики лежат **законы динамики** – *система трех взаимосвязанных законов Ньютона*, сформулированных им в 1687 году.

ПЕРВЫЙ ЗАКОН НЬЮТОНА: *Существуют такие системы отсчета, относительно которых материальная точка будет двигаться прямолинейно и равномерно или находиться в состоянии покоя, если на нее не действуют силы, или сумма действующих сил равна нулю.*

Любое тело препятствует изменению своего движения – такая способность называется **инерционностью**, и первый закон Ньютона, утверждающий это, часто называют ***законом инерции***.

Почему утверждение первого закона Ньютона о движении тел в отсутствии сил не согласуется с жизненным опытом? Почему опыт подсказывает, что для поддержания движения требуется сила? Дело в том, что в первом законе Ньютона речь идет о свободных телах, на которые не действуют никакие силы, а в окружающей реальности всегда есть взаимодействия. Абсолютно свободных тел в природе не существует.

Первый закон Ньютона *определяет и утверждает* существование систем отсчета, называемых **инерциальными системами отсчета** (**ИСО**), в которых первый закон Ньютона выполняется по определению.

Инерциальной будет любая система отсчета, движущаяся прямолинейно и равномерно относительно другой ИСО.

ИСО – идеальная модель. Можно ли реальную систему отсчета считать в данной задаче инерциальной, определяется условиями задачи. Например, если в некоторой произвольной системе отсчета непрямолинейностью и неравномерностью движения свободного тела, на которое не действуют силы, в задаче можно пренебречь, то систему отсчета, относительно которой описывается движение, можно считать инерциальной.

Как мы отмечали, абсолютно свободных тел не существует. Хорошим приближением свободных тел являются звезды, которые находятся настолько далеко друг от друга, что действующие на них силы пренебрежимо малы. Если рассмотреть их движение в системе отсчета, связанной с Землей, то траекториями будут петлеобразные замкнутые линии, а не прямые. Следовательно, как мы видим, первый закон Ньютона не выполняется в связанной с Землей системе отсчета, значит, она, строго говоря, не является инерциальной. Тем не менее во многих часто встречающихся задачах влияние неинерциальности Земли не велико, и систему отсчета, связанную с Землей, в этих задачах можно считать инерциальной. С гораздо большей степенью приближения инерциальной системой является гелиоцентрическая система отсчета, связанная с Солнцем (одной из звезд), с осями, направленными на звезды.

Не случайно первый закон Ньютона является первым, то есть основным, самым важным. Для этого есть две взаимосвязанные причины.

Во-первых, первый закон определяет условия, в которых выполняются остальные законы динамики. Действительно, в неинерциальных системах ни второй, ни третий законы Ньютона выполняться не будут.

Во-вторых, первый закон устанавливает принципиальную связь между силой и движением, имеющую фундаментальный характер и заключающуюся в том, что для движения тела не требуется никакая сила, никакая причина. Тело будет двигаться равномерно и прямолинейно сколь угодно долго, именно при отсутствии действующих на него сил. Причина, которой является взаимодействие, необходима для изменения движения. Этот взгляд был впервые сформулирован Г. Галилеем, которому И. Ньютон выражает признательность в своем основополагающем труде «Математические начала натуральной философии». Позиция Галилея на первый взгляд противоречит здравому смыслу, и она принципиально расходилась с господствующей к тому времени около 2000 лет позицией Аристотеля (Aristoteles, 384–332 до н. э.). С точки зрения Аристотеля для поддержания движения с постоянной скоростью необходима постоянная сила, причем он доказал, что чем больше сила, тем больше скорость. В сущности, взгляд Аристотеля не является ошибочным, он согласуется с жизненным опытом. Различие позиций Галилея и Аристотеля в том, что первый учитывал трение как обычную силу, а второй совсем не рассматривал трение, относя его к «естественному состоянию», при этом дальнейшее познание становилось невозможным. Напротив, анализ Галилея мог быть расширен для объяснения гораздо большего числа явлений, и поэтому именно он стал фундаментом, на котором Ньютон возвел свою великую теорию движения, по праву считающуюся началом физики.

Важным законом динамики материальной точки является **второй закон Ньютона**, который указывает, как меняется движение тел под действием приложенных к нему сил.

ВТОРОЙ ЗАКОН НЬЮТОНА: *Если на материальную точку действует сила* $\vec{F}$*, то материальная точка движется с ускорением* $\vec{a}$*, которое совпадает по направлению с силой* $\vec{F}$ *и по величине прямо пропорционально величине силы* F,

$$\boxed{\vec{a} \sim \vec{F}}.$$

Коэффициент пропорциональности зависит от инертных свойств тела. Для описания инертных свойств ввели понятие **инертной массы** или просто **массы** m. **Масса** есть *количественная мера инертности тела*. Чем больше масса тела, тем труднее изменить характер его движения, то есть тем труднее заставить двигаться покоящееся тело, остановить движущееся или изменить направление его движения.

С учетом массы второй закон Ньютона можно записать

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}} \text{ или } \boxed{m\vec{a} = \vec{F}}.$$

Поскольку $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$, то $m\vec{a} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d(m\vec{v})}{dt}$, мы учли, что в нерелятивистской механике $m = const$, и внесли массу под знак производной.

Физическая величина $m\vec{v}$, стоящая под знаком производной, играет важную роль в физике, и поэтому имеет самостоятельный физический смысл. Она называется **импульсом материальной точки** $\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$. Таким же выражением определяется импульс твердого тела при поступательном движении. Используя импульс, запишем второй закон в более общем виде, который и был получен И. Ньютоном.

Общий вид второго закона Ньютона: $\boxed{\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}}$.

Исходя из этого выражения, *скорость изменения импульса материальной точки равна силе, действующей на материальную точку*.

Если на материальную точку действует несколько сил, то $\vec{F}$ является результирующей сил. Второй закон Ньютона, как все законы Ньютона, справедлив только в ИСО.

Вернемся к понятию массы. Для измерения массы тел необходим эталон. Любая неизвестная масса может быть найдена сравнительно с эталоном на основании второго закона Ньютона. Посмотрим, как можно найти массу тел, пользуясь вторым законом Ньютона.

Если на два тела действует одна и та же равнодействующая сил $\vec{F}$, которая ускоряет их, то отношение масс тел можно найти по обратному отношению их ускорений, сообщаемых телам силой $\vec{F}$,

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}.$$

Если известна одна из масс (это может быть эталонный килограмм) и оба ускорения, то вторая масса будет равна

$$m_2 = m_1\frac{a_1}{a_2}.$$

Второй закон Ньютона количественно описывает то, как силы влияют на движение. Силы же возникают в результате взаимодействия тел, при котором тела действуют друг на друга парными силами. В этом состоит содержание третьего закона Ньютона.

ТРЕТИЙ ЗАКОН НЬЮТОНА: *Если со стороны i-й точки на k-ю действует сила $\vec{F}_{ki}$, то со стороны k-й точки на i-ю будет действовать сила противодействия $\vec{F}_{ik}$, равная по величине и противоположная по направлению*

$$\boxed{\vec{F}_{ki} = -\vec{F}_{ik}}.$$

Силы действия и противодействия $\vec{F}_{ki}$ и $\vec{F}_{ik}$ всегда одной природы.

Заметим, что силы $\vec{F}_{ki}$ и $\vec{F}_{ik}$ приложены к разным материальным точкам, поэтому, вообще говоря, они не могут компенсировать друг друга.

Если эти материальные точки принадлежат одному и тому же телу, то тогда силы $\vec{F}_{ki}$ и $\vec{F}_{ik}$ являются **внутренними силами**. При нахождении суммарной силы, действующей на тело, их можно складывать, и их суммарный вклад будет равен нулю.

Если эти материальные точки принадлежат разным телам, то тогда силы $\vec{F}_{ki}$ и $\vec{F}_{ik}$ являются **внешними** для этих тел **силами**. В этом случае, как и для материальных точек, эти силы складывать нельзя.

Третий закон Ньютона позволяет перейти от динамики материальной точки к динамике системы материальных точек, то есть к динамике поступательного движения твердого тела.

До сих пор мы рассматривали материальную точку. Перейдем к рассмотрению более сложной модели – к произвольной механической системе – **системе материальных точек** – *совокупности n материальных точек $m_1, m_2, \ldots, m_n$, рассматриваемых как единое целое.*

Запишем второй закон Ньютона для всех n материальных точек системы

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \ldots + \vec{F}_{1n} + \vec{F}_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$m_n\vec{a}_n = \vec{F}_{n1} + \vec{F}_{n2} + \ldots + \vec{F}_{n,n-1} + \vec{F}_n .$$

Здесь $\vec{F}_{ij}$ – внутренние силы, действующие на i-ю точку со стороны j-й точки, $\vec{F}_i$ – суммарная внешняя сила, действующая на i-ю точку.

Сложим все уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{a}_i = (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}) + (\vec{F}_{13} + \vec{F}_{31}) + \ldots + (\vec{F}_{kl} + \vec{F}_{lk}) + \ldots + \sum_{i=n}^{n} F_i ,$$

последнее слагаемое $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ является суммой всех внешних сил.

По третьему закону Ньютона $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$, следовательно, каждая скобка $(\vec{F}_{ik} + \vec{F}_{ki})$ равна нулю. Тогда получаем

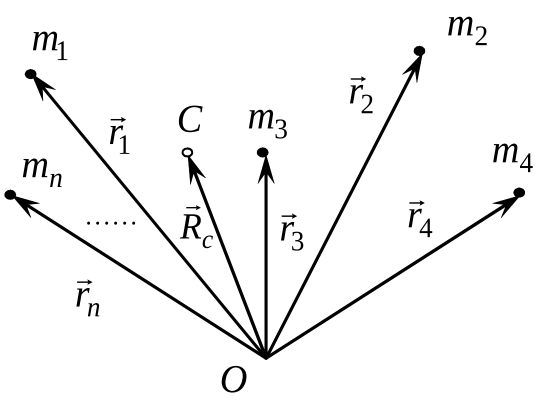
$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \vec{m}_i\vec{a}_i = \vec{F}_{внеш}},$$

где $\vec{F}_{внеш} = \sum\limits_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ – суммарная внешняя сила, действующая на всю систему.

Введем некоторую *абстрактную точку с радиус-вектором*

$$\boxed{\vec{R}_c = \frac{\vec{m}_1\vec{r}_1 + \ldots + \vec{m}_n\vec{r}_n}{m_1 + \ldots + m_n}},$$

которую назовем **центром масс системы** и, соответственно, $\vec{R}_c$ – **радиус-вектором центра масс**. В частности, для материальных точек одинаковой массы $(m_i = m)$ получим $\vec{R}_c = \dfrac{\vec{r}_1 + \ldots + \vec{r}_n}{n}$.



Обозначим массу всей системы $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$, тогда

$$\boxed{m\vec{R}_c = \sum_{n=1}^{n} m_i\vec{r}_i}.$$

Продифференцируем это выражение по времени, учитывая, что массы постоянны,

$$\frac{d(m\vec{R}_c)}{dt} = m\frac{d\vec{R}_c}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{n=1}^{n} m_i\vec{r}_i = \sum_{n=1}^{n} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}.$$

Так как $\dfrac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i$ – скорость i-й точки, а вводя $\vec{V} = \dfrac{d\vec{R}_c}{dt}$ – **скорость центра масс**, мы получаем

$$m\vec{V} = \sum_{n=1}^{n} m_i\vec{v}_i \quad \text{или} \quad \vec{P} = \sum \vec{p}_i\,,$$

где $\vec{p}_i = m_i\vec{v}_i$ – импульс i-й точки, а $\vec{P} = m\vec{V}$ – импульс системы, равный суммарному импульсу всех точек системы.

Полученное выражение еще раз продифференцируем по времени, учитывая, что $\dfrac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{a}_i$, и вводя $\dfrac{d\vec{V}}{dt} = \vec{a}$ – **ускорение центра масс**, тогда

$$m\vec{a} = \sum_{n=1}^{n} \vec{m}_i\vec{a}_i\,.$$

Поскольку $\sum_{i=n}^{n} \vec{m}_i \vec{a}_i = \vec{F}_{внеш}$, то мы получаем **второй закон Ньютона для системы материальных точек – основной закон динамики поступательного движения** – *произведение массы системы на ускорение центра масс равно суммарной внешней силе*

$$\boxed{m\vec{a} = \vec{F}_{внеш}}.$$

Или, по аналогии со вторым законом Ньютона для одной материальной точки, *ускорение центра масс системы прямо пропорционально суммарной внешней силе, действующей на систему, и обратно пропорционально суммарной массе всех точек системы*

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\vec{F}_{внеш}}{m}}.$$

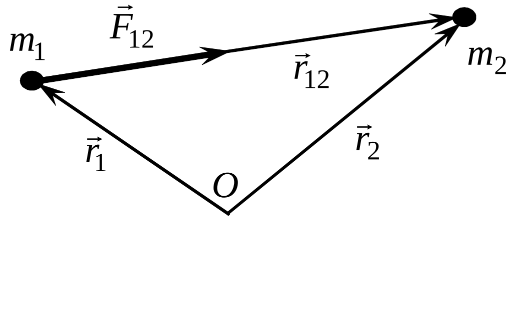
Второй закон Ньютона для системы материальных точек имеет такой же вид, как второй закон Ньютона для одной материальной точки. Только вместо массы точки нужно брать суммарную массу системы, вместо суммарной силы – суммарную внешнюю силу. Также вместо импульса точки необходимо использовать суммарный импульс всех точек. Вместо радиус-вектора материальной точки – радиус-вектор центра масс системы материальных точек.

В качестве системы материальных точек может быть выбрано абсолютно твердое тело. Все введенные величины и полученные для системы законы могут быть использованы для абсолютно твердого тела, но только при поступательном движении. Поскольку, если тело движется поступательно, то все точки тела движутся так же, как центр масс $\vec{a}_i = \vec{a}$, тогда полученный закон описывает движение всех точек, а значит, движение всего тела.

Если тело еще и вращается, то полученный закон описывает только движение центра масс, с которым можно связать поступательное движение всего тела. ***Произвольное движение*** *тела можно представить как совокупность* ***поступательного движения, связанного с движением центра масс****, подчиняющегося основному закону поступательного движения, и* ***вращательного движения вокруг центра масс***. Особенности вращательного движения мы рассмотрим, когда будем изучать механику твердого тела.

Кроме трех основных законов динамики, Ньютон установил закон всемирного тяготения, изучая движение небесных тел.

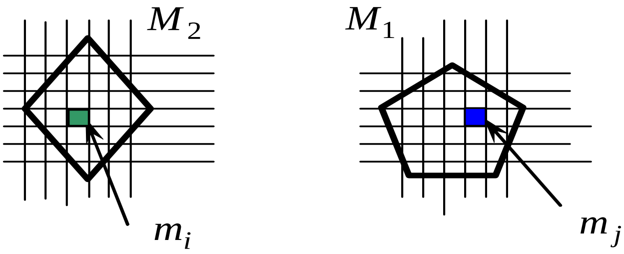
ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ *для материальных точек: материальные точки массами m_1 и m_2, удаленные друг от друга на расстояние R, притягиваются друг к другу с силой, пропорциональной массам тел и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними,*



$$\boxed{F_{грав} = G\frac{m_1 m_2}{R^2}} \quad \text{или в векторном виде} \quad \boxed{\vec{F}_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12}},$$

где $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \dfrac{Н \cdot м^2}{кг^2}$ – гравитационная постоянная.

Если нас интересует гравитационное взаимодействие протяженных тел, то для тел произвольной формы найти силу их притяжения по этой формуле нельзя. Для нахождения силы тело необходимо представить как систему материальных точек. Силу притяжения между i-й точкой первого тела m_i и j-й точкой второго тела m_j можно найти по закону всемирного тяготения



$$\boxed{\vec{F}_{ij} = G\frac{m_i m_j}{r_{ij}^3}\vec{r}_{ij}}.$$

Здесь $\vec{F}_{ij}$ – сила, действующая на i-ю точку со стороны j-й точки, $\vec{r}_{ij}$ – вектор, направленный из i-й точки в j-ю точку.

Силу взаимодействия тел найдем, сложив силы притяжения точек

$$\boxed{\vec{F}_{12} = \sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2}\frac{m_i m_j}{r_{ij}^3}\vec{r}_{ij}}.$$

Выполнив эти действия для сферически симметричных тел (тел со сферическим распределением массы), мы получим точно такое же выражение, как и для материальных точек $F_{грав} = G\dfrac{m_1 m_2}{R^2}$, но m_1 и m_2 здесь массы сферически симметричных тел, R – расстояние между их центрами. Направлена сила притяжения будет по прямой, проходящей через центры тел. Таким образом, сферически симметричные тела будут притягиваться так же, как материальные точки с массами, равными массам тел, помещенные в их центры.

Если материальная точка находится на поверхности Земли, то сила гравитации будет равна

$$\boxed{F_{грав} = G\frac{Mm}{R^2} = mg},$$

здесь M – масса Земли, m – масса тела, R – радиус Земли, g – ускорение свободного падения на поверхности Земли (табличное значение равно $g = 9{,}80\dfrac{м}{с^2}$). Для материальных точек на поверхности Земли ускорение свободного падения находится в пределах $(9{,}79 \div 9{,}83)\ \dfrac{м}{с^2}$.

Если материальная точка находится на высоте h над поверхностью Земли, то сила гравитационного притяжения будет равна

$$F_{грав} = G\frac{Mm}{(R+h)^2} = mg',$$

где $g' < g$ – ускорение свободного падения на высоте h.

Отметим важный момент. В выражение для силы всемирного тяготения $F_{грав} = G\frac{Mm}{R^2}$ входит масса m и в выражение для силы тяжести $F = mg$, являющееся вторым законом Ньютона $F = ma$, тоже входит масса m. Но на самом деле эти величины имеют различный физический смысл.

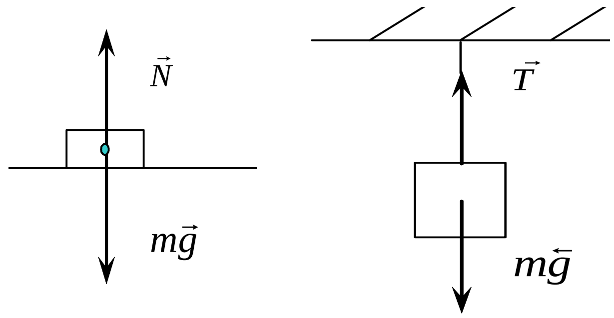
Масса, входящая во второй закон Ньютона, является мерой инертных свойств тела, а масса, входящая в закон всемирного тяготения, является мерой гравитационных свойств тела. Это абсолютно разные физические величины, которые правильнее было бы обозначать разными буквами $m_Г$ и $m_И$, и можно было бы измерять в различных единицах (при этом изменилась бы только гравитационная постоянная). Но мир, в котором мы живем, устроен так, что гравитационные свойства и инерционные свойства, по-видимому, жестко связаны и для их меры, как показывает эксперимент, может быть взята одна величина. Поэтому принято, что $m_Г = m_И = m$. В настоящее время экспериментально установлено, что значения масс совпадают до 12-го знака.

В завершение рассмотрим простейшие примеры взаимодействия тел.

Пусть тело находится на опоре или на подвесе.

$\vec{N}$ – **сила реакции опоры** – составляющая действующей со стороны опоры силы, направленная нормально к опоре, $\vec{T}$ – **сила натяжения подвеса**, с которой подвес действует на тело.

Обе силы имеют электромагнитную природу.



Если вертикальная проекция скорости тела постоянна ($a_y = 0$), то из второго закона Ньютона следует, что $\vec{N} = -m\vec{g}$ и $\vec{T} = -m\vec{g}$.

Сила, с которой тело действует на опору или подвес, называется **в е с о м т е л а** P. С учетом третьего закона Ньютона вес тела численно равен силе реакции опоры или силе натяжения подвеса $P = N$ или $P = T$.

В рассмотренных случаях вес равен силе тяжести.

Если вертикальная составляющая ускорения (направленная параллельно весу) не равна нулю ($a_y \neq 0$), то вес тела будет отличаться от силы тяжести.

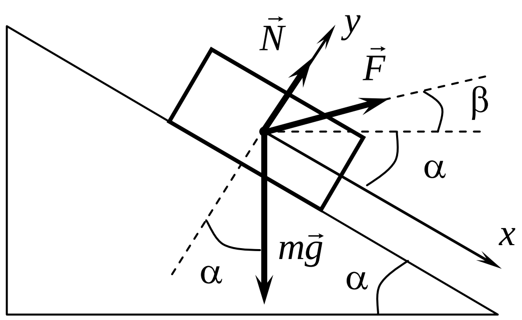
Вес тела, движущегося с ускорением a, направленным вниз, на поверхности Земли равен

$$P = m(g-a).$$

Вес тела, движущегося с ускорением a, направленным вверх, на поверхности Земли равен

$$P = m(g + a).$$

Если тело падает свободно, ускорение равно ускорению свободного падения, $a = g'$ (или $a = g$ на поверхности Земли), и ***вес равен нулю***, $P = 0$ – тело находится в состоянии **невесомости.** Свободно падающими телами являются спутники, находящиеся на орбите, поскольку с хорошим приближением единственной силой, действующей на спутник, является сила притяжения к Земле. Астронавты, находящиеся на спутнике, как и все тела там, будут в невесомости. Камень, свободно летящий в поле силы тяжести Земли, также будет находиться в невесомости.



Отметим, что вес тела будет отличаться от силы тяжести также, если есть силы, влияющие на силу реакции опоры или силу натяжения подвеса. Например, для представленного на рисунке тела. Для него второй закон Ньютона в векторной форме будет иметь вид

$$m\vec{a} = \vec{N} + \vec{F} + m\vec{g}.$$

В проекциях на оси получим

$$ma = F\cos(\alpha + \beta) + mg\sin\alpha,$$
$$0 = N + F\sin(\alpha + \beta) - mg\cos\alpha.$$

Откуда найдем вес тела $P = N = mg\cos\alpha - F\sin(\alpha + \beta)$.

Тема: **Законы сохранения в механике**

Вопросы:

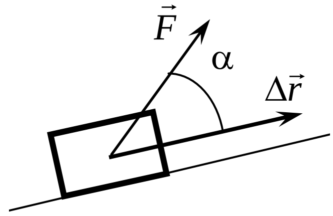
1. *Механическая работа. Мощность.*
2. *Кинетическая энергия. Теорема об изменении кинетической энергии.*
3. *Консервативные и диссипативные силы. Потенциальная энергия.*
4. *Теорема об изменении полной механической энергии.*
5. *Закон сохранения полной механической энергии.*
6. *Закон сохранения импульса системы материальных точек.*
7. *Закон сохранения проекции импульса системы материальных точек.*
8. *Столкновение. Общий случай. Виды столкновений.*
9. *Лобовой или центральный абсолютно упругий удар двух тел.*
10. *Лобовой абсолютно неупругий удар двух тел.*

При решении задач в механике наряду с «силовым подходом», основанным на законах Ньютона, применяют «энергетический подход», использующий законы изменения энергии. В предыдущей теме мы познакомились с первым подходом, в этой теме рассмотрим второй и получим фундаментальные законы сохранения механической энергии и импульса. Мы продолжаем рассматривать только поступательное движение.

Если на тело действует сила $\vec{F}$ *, и точка приложения силы перемещается, то эта сила совершает* **механическую работу** A.

Если сила постоянна, а движение прямолинейно, то работа равна скалярному произведению силы $\vec{F}$ на приращение радиус-вектора точки приложения силы $\Delta\vec{r}$

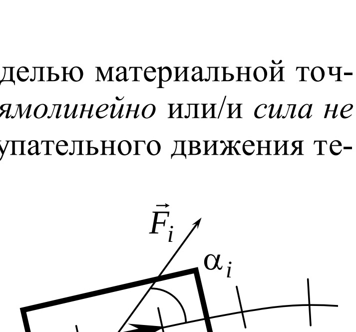
$$\boxed{A = F\Delta r\cos\alpha = \vec{F}\Delta\vec{r}}.$$



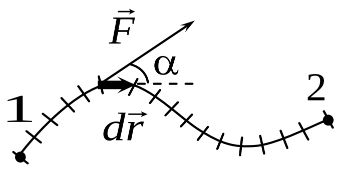
Здесь мы использовали символическую запись скалярного произведения векторов, которое по определению равно произведению длин векторов на косинус угла между ними $\vec{a}\vec{b} = ab\cos\alpha$.

В зависимости от угла α между направлением силы $\vec{F}$ и перемещением $\Delta\vec{r}$, работа может быть положительной ($A > 0$), при $\alpha < 90^\circ$, отрицательной ($A < 0$) при $\alpha > 90^\circ$ или равной нулю ($A = 0$) при $\alpha = 90^\circ$.

Если тело, к которому приложена сила, описывается моделью материальной точки или движется поступательно, но при этом *движение не прямолинейно* или/и *сила не постоянна*, то для нахождения работы силы траекторию поступательного движения тела необходимо разделить на участки, в пределах которых силу можно считать постоянной, а сами участки – прямолинейными. Работа A будет приблизительно равна сумме работ $A_i = F_i\Delta r_i\cos\alpha_i = \vec{F}_i\Delta\vec{r}_i$, совершенных на каждом участке, $A \approx \sum A_i = \sum \vec{F}_i\Delta\vec{r}_i$. Равенство будет приблизительным, потому что сумма будет зависеть от разбиения траектории на участки.



Для достижения точного равенства нужно количество участков устремить к бесконечности, а их длину к нулю. При этом в сумме заменим конечные величины



бесконечно малыми: $\Delta r_i \to dr$, $A_i \to \delta A$, $\vec{F}_i \to \vec{F}$, и рассмотрим предел суммы, который по определению является интегралом. То есть работа равна

$$\boxed{A_{12} = \int\limits_{(1)}^{(2)} \delta A = \int\limits_{(1)}^{(2)} \vec{F} d\vec{r}}.$$

Это определение **м е х а н и ч е с к о й   р а б о т ы** *в общем случае*. По определению работа является скалярной величиной. Величина $\boxed{\delta A = \vec{F} d\vec{r}}$ называется **элементарной работой**.

Для характеристики работы, совершаемой в единицу времени, в механике используют понятие мощности. **М о щ н о с т ь ю (мгновенной мощностью)** называется *скалярная величина, равная отношению элементарной работы* δA *к бесконечно малому промежутку времени* dt, *в течение которого эта работа совершается*

$$\boxed{P = \frac{\delta A}{dt} = \frac{\vec{F} d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{v}},$$

где $\vec{v}$ – скорость точки приложения силы.

В общем случае мощность может изменяться с течением времени.

С р е д н я я за промежуток времени t **м о щ н о с т ь** равна *отношению работы* A, *совершенной за этот промежуток времени, к времени* t

$$\langle P \rangle = \frac{A}{t}.$$

Если на материальную точку действует несколько сил, и в качестве $\vec{F}$ взята результирующая сил, то работа A будет работой всех сил.

Поскольку в этом случае по второму закону Ньютона $\vec{F} = m\vec{a} = \dfrac{md\vec{v}}{dt}$, то

$$A_{\substack{всех\\сил}} = \int \frac{md\vec{v}}{dt} d\vec{r} = \int\limits_{V_1}^{V_2} m\vec{v}d\vec{v} = \int\limits_{V_1}^{V_2} md\left(\frac{\vec{v}^2}{2}\right) = \int\limits_{V_1}^{V_2} md\left(\frac{v^2}{2}\right) = \frac{mv^2}{2}\Bigg|_{V_1}^{V_2} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}.$$

Мы учли, что $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, $\vec{v}^2 = v^2$. Таким образом, мы получили

$$\boxed{A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}}.$$

Индекс у работы мы опустили, и будем опускать далее, имея в виду, что A – работа всех сил, если специально не оговорено, работу какой силы мы рассматриваем.

Полученное выражение $\dfrac{mv^2}{2}$ называется **к и н е т и ч е с к о й   э н е р г и е й   м а т е р и а л ь н о й   т о ч к и**

$$\boxed{E_{кин} = \frac{mv^2}{2}}.$$

Кинетической энергией обладают все движущиеся тела.

Кинетическая энергия механической системы *равна сумме кинетических энергий всех частей системы*. Например, для системы, состоящей из n материальных точек, она равна

$$\boxed{E_{кин} = \sum_{i=1}^{n} \frac{mv_i^2}{2}},$$

где m_i и $\vec{v}_i$ – масса и скорость i-й материальной точки системы.

Если абсолютно твердое тело массой m движется поступательно со скоростью $\vec{v}$, то, сложив кинетические энергии всех точек тела, получим **кинетическую энергию поступательного движения абсолютно твердого тела**

$$\boxed{E_{кин} = \frac{mv^2}{2}}.$$

При вычислении работы всех сил, действующих на материальную точку, мы доказали **теорему об изменении кинетической энергии материальной точки** – *приращение кинетической энергии материальной точки равно работе всех сил, действующих на тело,*

$$\boxed{\Delta E_{кин} = E_{кин_2} - E_{кин_1} = A}.$$

При доказательстве теоремы об изменении кинетической энергии для абсолютно твердого тела массой m нужно воспользоваться основным уравнением динамики поступательного движения $m\vec{a} = \vec{F}_{внеш}$, тогда мы получим **теорему об изменении кинетической энергии поступательного движения абсолютно твердого тела** – *приращение кинетической энергии абсолютно твердого тела равно работе всех внешних сил*

$$\boxed{\Delta E_{кин} = E_{кин_2} - E_{кин_1} = A_{внеш}}.$$

Такой же результат мы получим, если вычислим работу всех сил. Для абсолютно твердого тела изменение кинетической энергии равно суммарной работе всех сил – внутренних и внешних. Но работа внутренних сил равна нулю

$$A_{внутр} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{ik} d\vec{r}_i = \ldots + (\vec{F}_{jl} d\vec{r}_j + \vec{F}_{lj} d\vec{r}_l) + \ldots = \ldots + \vec{F}_{jl}(d\vec{r}_j - d\vec{r}_l) + \ldots =$$

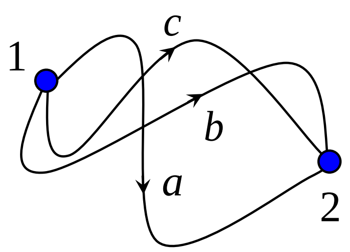
$$= \ldots + \vec{F}_{jl}(d\vec{r}_j - d\vec{r}_l) + \ldots = \ldots + \vec{F}_{jl} d(\vec{r}_j - \vec{r}_l) + \ldots = \ldots + \vec{F}_{jl} d\vec{r}_{jl} + \ldots = 0,$$

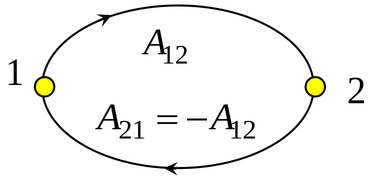
поскольку расстояние между материальными точками абсолютно твердого тела не изменяется $dr_{jl} = 0$.

Действующие на тело силы можно разделить на два типа:

1) ***Консервативные силы*** *(*например, силы тяжести, упругости*).*

Сила называется **консервативной**, *если она зависит только от положения тела, на которое действует* $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$, *и производимая ею работа при перемещении тела зависит только от начального и конечного положения тела, и, следовательно, не зависит от формы траектории.*





Если действуют только консервативные силы, то $A_{1a2} = A_{1b2} = A_{1c2}$.
Работа консервативных сил по замкнутой траектории равна нулю.

2) ***Диссипативные силы*** (например, силы трения, сопротивления)

Сила называется **диссипативной (неконсервативной)**, *если производимая ею работа при перемещении тела зависит от траектории.*

Диссипативные силы зависят от скорости тела, на которое действуют, $\vec{F} = \vec{F}(\vec{v})$, причем направлены, как правило, противоположно скорости. Работа диссипативных сил отрицательна $A < 0$ $(\cos\alpha < 0)$. Поскольку работа связана с кинетической энергией соотношением $A = E_{кин_2} - E_{кин_1}$, то работа диссипативных сил всегда уменьшает кинетическую энергию.

Консервативные силы обладают свойством, благодаря которому их и выделили из всех сил. *Для поля консервативных сил можно внести* **потенциальную энергию** тела $E_{пот}$ так, что *разность потенциальной энергии между начальным и конечным положениями тела равна работе консервативных сил при перемещении тела из начального положения в конечное*

$$\boxed{A_{конс} = E_{пот_1} - E_{пот_2}}.$$

Введенная таким образом потенциальная энергия, зависит только от положения тела (взаимного расположения тел и его частей).

По определению потенциальной энергии $E_{пот_2} = E_{пот_1} - A_{конс}$. Начальное положение часто выбирают так, чтобы потенциальная энергия тела была равна нулю, $E_{пот_1} = 0$. Тогда потенциальная энергия тела в некоторой точке поля консервативных сил будет равна работе консервативных сил при перемещении тела из этого положения в положение, где потенциальная энергия равна нулю.

Используя определение работы, можем записать

$$\boxed{\Delta E_{пот} = -\int_{(1)}^{(2)} \vec{F}_{конс} d\vec{r}}.$$

Для силы тяжести (она консервативна) при подъеме тела на высоту h с нулевой высоты изменение потенциальной энергии равно

$$\Delta E_{пот} = E_{пот_2} - E_{пот_1} = -\int_0^h mg(-dh) = mgh.$$

Если на нулевой высоте потенциальная энергия равна нулю, $E_{пот_1} = E_{пот}(0) = 0$, то $E_{пот_2} = E_{пот}(h) = mgh$ – есть потенциальная энергия тела на высоте h.

Посмотрим, что дает введение потенциальной энергии. Запишем теорему об изменении кинетической энергии механической системы

$$E_{кин_2} - E_{кин_1} = A = A_{конс} + A_{дисс} = E_{пот_1} - E_{пот_2} + A_{дисс}.$$

Вычислив отдельно работу диссипативных и консервативных сил, действующих на систему, получим, что работа диссипативных сил равна изменению суммы потенциальной и кинетической энергии

$$\boxed{A_{дисс} = (E_{кин_2} + E_{пот_2}) - (E_{кин_1} + E_{пот_1})}.$$

Суммарная кинетическая и потенциальная энергия $\boxed{E = E_{кин} + E_{пот}}$ называется **полной механической энергией.**

Изменение полной механической энергии равно работе диссипативных сил

$$\boxed{\Delta E = A_{дисс}}.$$

Если диссипативных сил нет, то есть $A_{дисс} = 0$, то $\Delta E = 0$, следовательно, полная механическая энергия сохраняется

$$\boxed{E = E_{кин} + E_{пот} = const, \quad при\ A_{дисс} = 0}.$$

Мы получили **закон сохранения полной механической энергии** (ЗСЭ) – частный случай фундаментального закона физики – закона сохранения энергии. *Полная механическая энергия тела либо системы тел сохраняется, если работа диссипативных сил, действующих на тело, равна нулю.*

Предполагается, что потенциальные поля стационарны, то есть не изменяются с течением времени сами по себе, они могут изменяться со временем только при изменении положения рассматриваемой системы.

Системы, в которых выполняется закон сохранения полной механической энергии, называются **консервативными системами** – действующие на нее диссипативные силы работы не совершают, а внешние потенциальные силы стационарны.

Если *механическая система не взаимодействует с внешними телами*, она называется **замкнутой системой.** Для замкнутой системы выполняется **закон сохранения импульса**. В отличие от законов Ньютона закон сохранения импульса справедлив не только в классической механике – это, как и закон сохранения энергии, один из фундаментальных законов физики.

Для механических систем, которые мы рассматриваем в классической механике, закон сохранения импульса можно получить из законов Ньютона. Запишем основной закон динамики для поступательного движения

$$m\vec{a} = \vec{F}_{внеш}.$$

Поскольку по определению ускорения центра масс $m\vec{a} = m\dfrac{d\vec{V}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\vec{P}$, то

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\sum_{n=1}^{n}\vec{p}_i\right) = \vec{F}_{внеш}},$$

так как импульс системы равен сумме импульсов материальных точек, входящих в систему, $\vec{P} = \sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i$.

Отсюда следует **закон сохранения импульса** (ЗСИ) для системы материальных точек.

Если на систему не действуют внешние силы (система замкнута), или сумма внешних сил равна нулю, то суммарный импульс системы будет сохраняться.

То есть, $\boxed{\text{если } \vec{F}_{внеш} = 0, \text{ то } \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = const}$.

Поскольку импульс системы $\vec{P} = m\vec{V}$, где m – масса системы, $\vec{V}$ – скорость центра масс системы, то из закона сохранения импульса следует, что при любых процессах в замкнутой системе скорость центра масс не меняется.

Заметим, что одно векторное равенство $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{внеш}$ эквивалентно трем скалярным

$$\frac{dP_x}{dt} = F_{x_{внеш}}, \quad \frac{dP_y}{dt} = F_{y_{внеш}}, \quad \frac{dP_z}{dt} = F_{z_{внеш}}.$$

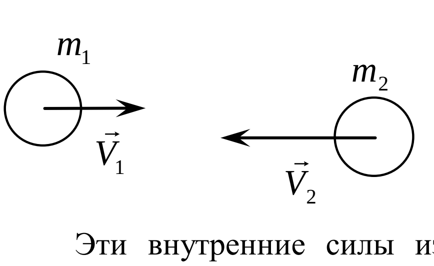
Если $F_{x_{внеш}} = F_{y_{внеш}} = F_{z_{внеш}} = 0$, закон сохранения импульса выполняется. Если хоть одна из проекций не равна нулю, то закон сохранения импульса выполняться не будет. Но, если проекция суммарной внешней силы на некоторую ось будет равна нулю, то будет выполняться **закон сохранения проекции импульса** (ЗСПИ) на эту ось.

Например, если $F_{x_{внеш}} = 0$, то $P_x = \sum_{i=1}^{n} p_{ix} = const$ – закон сохранения проекции импульса системы на ось OX. Например, если на систему действует только сила тяжести, то горизонтальная составляющая импульса будет сохраняться.

Подчеркнем еще раз, что хотя закон сохранения импульса (проекции импульса) в данном случае мы получили из второго закона Ньютона, он имеет более общий характер, чем законы Ньютона. В микромире атомов второй закон Ньютона не выполняется, а великие законы сохранения, к которым относится закон сохранения импульса (проекции импульса), продолжают выполняться.

Рассмотрим выполнение законов сохранения импульса и энергии на примере столкновения двух тел.

Столкновением (ударом) двух тел будем называть *кратковременное взаимодействие тел, которые, двигаясь навстречу друг другу, первоначально не взаимодействовали, но скорости их были направлены так, чтобы взаимодействие произошло*.



При соударениях между телами возникают внутренние по отношению к системе, состоящей из соударяющихся тел, силы, которые, как правило, настолько большие, что превышают все постоянно действующие на части системы внешние силы.

Эти внутренние силы изменяют импульс частей системы, но импульс всей системы соударяющихся тел изменить не могут, поскольку являются внутренними. Изменение импульса внешними силами $\Delta\vec{P} = \vec{F}_{внеш}\tau$ мало, в силу малости времени столкновения τ. Поэтому изменением импульса системы можно пренебречь. Следовательно, при столкновениях можно пользоваться законом сохранения импульса.

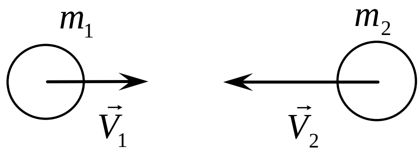
Лобовым или центральным ударом называется *удар, при котором скорости тел направлены по прямой, соединяющей центры тел*.

Абсолютно упругим ударом называется *удар, при котором суммарная кинетическая энергия тел до и после удара одинакова*. Для этого удара энергия системы тел сохраняется – выполняется закон сохранения энергии.

Абсолютно неупругий удар – *столкновение, после которого тела движутся как одно целое*.

Рассмотрим лобовой абсолютно упругий удар (АУУ).

$$\begin{cases} m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = m_1\vec{V}_1' + m_2\vec{V}_2' & \text{– ЗСИ} \\ \dfrac{m_1V_1^2}{2} + \dfrac{m_2V_2^2}{2} = \dfrac{m_1V_1'^2}{2} + \dfrac{m_2V_2'^2}{2} & \text{– ЗСЭ} \end{cases}$$



Определим скорости тел после удара V_1', V_2'. Сначала соберем характеристики одного тела с одной стороны от знака равенства

$$\begin{cases} m_1\vec{V}_1 - m_1\vec{V}_1' = m_2\vec{V}_2 - m_2\vec{V}_2', \\ m_1\vec{V}_1^2 - m_1\vec{V}_1'^2 = m_2\vec{V}_2'^2 - m_2\vec{V}_2^2. \end{cases}$$

Затем вынесем массы за скобки

$$\begin{cases} m_1(\vec{V}_1 - \vec{V}_1') = m_2(\vec{V}_2' - \vec{V}_2), \\ m_1(\vec{V}_1 - \vec{V}_1')(\vec{V}_1 + \vec{V}_1') = m_2(\vec{V}_2 - \vec{V}_2')(\vec{V}_2' + \vec{V}_2). \end{cases}$$

Далее разделим второе уравнение на первое, и результат запишем вместо второго уравнения

$$\begin{cases} m_1(\vec{V}_1 - \vec{V}_1') = m_2(\vec{V}_2' - \vec{V}_2), \\ \vec{V}_1 + \vec{V}_1' = \vec{V}_2' + \vec{V}_2 . \end{cases}$$

Мы получили систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Разделим первое уравнение на m_1

$$\begin{cases} \vec{V}_1 - \vec{V}_1' = \dfrac{m_2}{m_1}(\vec{V}_2' - \vec{V}_2), \\ \vec{V}_1 + \vec{V}_1' = \vec{V}_2 + \vec{V}_2'. \end{cases}$$

Сложим уравнения (при этом исключится $\vec{V}_1'$) и получим:

$$2\vec{V}_1 = \frac{m_2}{m_1}\vec{V}_2' + \vec{V}_2' - \frac{m_2}{m_1}\vec{V}_2 + \vec{V}_2.$$

Умножим на m_1, получим $2m_1\vec{V}_1 = (m_2 + m_1)\vec{V}_2' - (m_2 - m_1)\vec{V}_2$, перенесем известные и неизвестные величины по разные стороны от знака равенства, разделим на $m_1 + m_2$ и получим скорость 2-го шара после соударения

$$\boxed{\vec{V}_2^{/} = \frac{2m_1\vec{V}_1 + (m_2 - m_1)\vec{V}_2}{m_1 + m_2}}.$$

Для нахождения скорости $\vec{V}_1^{/}$ первого шара можно проделать ту же работу (исключив $\vec{V}_2^{/}$) или просто поменять местами индексы $1 \to 2,\ \ 2 \to 1$, поскольку исходные уравнения симметричны относительно перестановки индексов. В любом случае получим скорость1-го шара после соударения

$$\boxed{\vec{V}_1^{/} = \frac{2m_2\vec{V}_2 + (m_1 - m_2)\vec{V}_1}{m_1 + m_2}}.$$

Мы нашли скорости шаров после абсолютно упругого удара.

Рассмотрим теперь лобовой абсолютно неупругий удар (АНУ).

Закон сохранения энергии в этом случае не выполняется. По определению удара скорости после соударения одинаковы $\vec{V}_1^{/} = \vec{V}_2^{/}$. Обозначим $\vec{V}_1^{/} = \vec{V}_2^{/} \equiv \vec{V}^{/}$. Тогда закон сохранения импульса будет иметь следующий вид:

$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = (m_1 + m_2)\vec{V}^{/}.$$

Из него находим скорость тел после столкновения

$$\vec{V}^{/} = \frac{m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2}{m_1 + m_2}.$$

В полученном выражении слева стоит скорость центра масс после столкновения, а справа скорость центра масс до столкновения.

Выделившееся при деформации тел при ударе тепло равно разности кинетической энергии системы

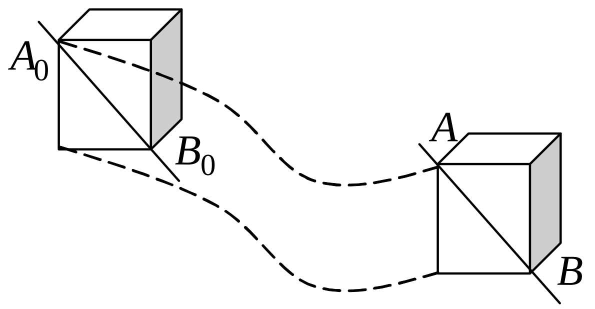
$$Q = \frac{m_1\vec{V}_1^2}{2} + \frac{m_2\vec{V}_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)}{2}\vec{V}^{/2}.$$

Подставив выражение для $V^{/}$, получим $\boxed{Q = \dfrac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(\vec{V}_1 - \vec{V}_2)^2}$.

Тема: **Механика твердого тела**

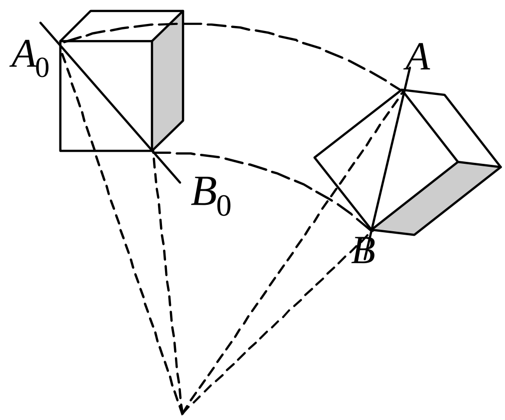
Вопросы:
1. *Вращательное движение. Момент силы относительно оси.*
2. *Момент импульса частицы относительно оси.*
3. *Основной закон динамики вращательного движения материальной точки.*
4. *Момент импульса системы материальных точек.*
5. *Момент инерции твердого тела относительно неподвижной оси. Определение в общем случае.*
6. *Основной закон динамики вращательного движения твердого тела.*
7. *Закон сохранения момента импульса относительно неподвижной оси.*
8. *Вычисление момента инерции симметричных тел. Теорема Штейнера.*
9. *Кинетическая энергия вращающегося тела.*

До сих пор мы рассматривали только один тип движения – ***поступательное движение***, при котором любая прямая, связанная с движущимся телом, остается параллельной самой себе. При поступательном движении все точки тела проходят одинаковые пути, имеют одинаковые скорости, и можно рассматривать движение тела независимо от его размеров и формы как движение одной точки тела. Все характеристики поступательного движения (движения одной точки) мы уже ввели.

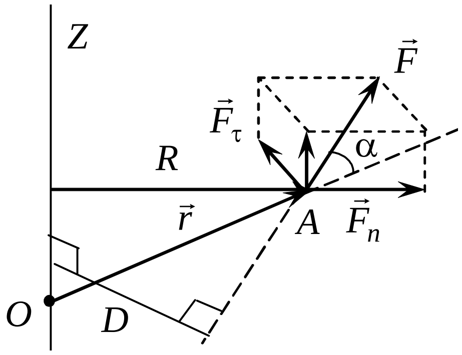


В этой теме мы переходим к механике твердого тела, при изучении которой будем говорить о понятиях, явлениях и процессах, характерных для движения только твердых тел. Поэтому в механике твердого тела мы будем заниматься исключительно ***вращательным движением***, при котором форма (распределение массы) и размеры тела имеют существенное значение.

Вспомним, что **вращательным движением** твердого тела называют движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой осью вращения. Ось вращение может находиться вне тела.



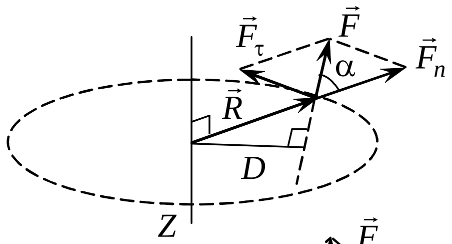
При вращательном движении информации о силах, действующих на тело, недостаточно для характеристики приводящего к вращению воздействия. На результат действия силы влияет также направление силы и точка ее приложения. Количественной мерой вращательного воздействия является не сила, а момент силы. **Момент силы (вращающий момент)** – *характеризует способность силы сообщать покоящемуся телу вращательное движение вокруг оси, тельно которой он берется, и изменять характер этого вращения.*



Момент силы относительно неподвижной оси Z равен

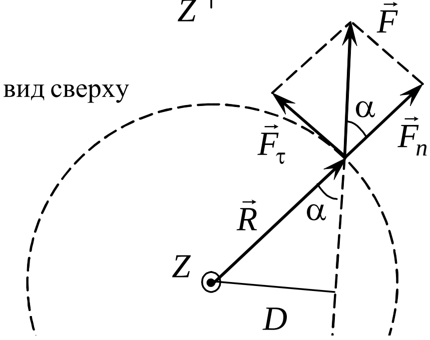
$$\boxed{M = F_\tau R = FD},$$

F_τ – величина составляющей силы $\vec{F}_\tau$, лежащей в плоскости, перпендикулярной оси вращения; $\vec{F}_n$ – составляющая силы, лежащая в одной плоскости с осью и перпендикулярная ей; R – расстояние от точки приложения силы до оси; D – *расстояние от прямой действия силы до оси* – **плечо силы относительно оси**.



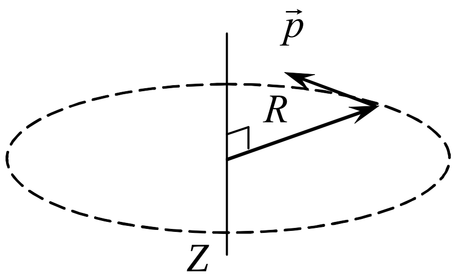
Если сила $\vec{F}$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси, то есть $\vec{F} = \vec{F}_\tau + \vec{F}_n$, то момент импульса будет равен

$$M = FD = FR\sin\alpha .$$



Момент силы не изменится при смещении точки приложения силы вдоль прямой действия силы.

При вращательном движении аналогом импульса является **момент импульса.**



Моментом импульса материальной точки относительно оси Z называется *скалярная величина* L, *равная* $L = pD$, где p – импульс материальной точки, D – **плечо импульса относительно оси** – *расстояние от оси до прямой, вдоль которой направлен импульс*, равный радиусу окружности, по которой вращается материальная точка.

При поступательном движении импульс p связан с силой F по закону Ньютона $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$. Для вращательного движения можно ожидать, что момент импульса L должен быть связан с моментом силы M. Продифференцируем выражение, определяющее момент импульса $L = pD$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dp}{dt}D = \frac{dp}{dt}R = F_\tau R = M .$$

Мы учли, что движение материальной точки происходит по окружности и что импульс направлен по касательной к окружности, то есть плечо импульса равно радиусу окружности – $D = R$. Кроме того, мы воспользовались тем, что $\dfrac{dp}{dt} = m\dfrac{dv}{dt} = ma_\tau = F_\tau$. В результате мы получаем выражение, которое называется

основным уравнением динамики вращательного движения материальной точки

$$\boxed{\frac{dL}{dt} = M},$$

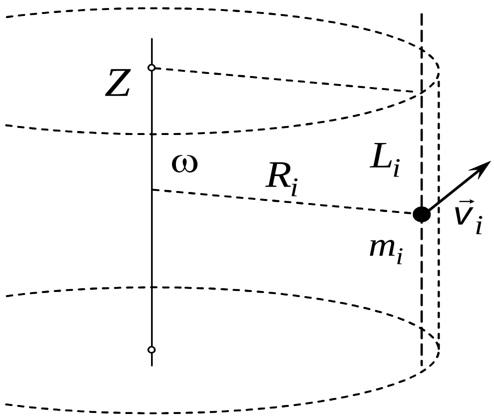
являющееся **для материальной точки вращательным аналогом второго закона Ньютона**, записанного в общем виде. *Скорость изменения момента импульса равна моменту приложенной силы.* Полученный закон справедлив только в инерциальных системах отсчета.

Мы ввели основные понятия вращательного движения и получили соотношения между ними для материальной точки. У нас все готово для перехода к рассмотрению вращения абсолютно твердого тела (АТТ), которое будем представлять как систему материальных точек.

Момент импульса абсолютно твердого тела равен *сумме моментов импульсов всех материальных точек, составляющих тело,*

$$\boxed{L = \sum L_i}.$$

Найдем момент импульса абсолютно твердого тела, вращающегося относительно неподвижной оси. Разобьем тело на N материальных точек массами m_i, движущихся с линейными скоростями $\vec{v}_i$. Угловая скорость ω для всех точек тела одинакова. Момент импульса для i-й материальной точки равен $L_i = m_i v_i R_i$, где R_i – расстояние от i-й материальной точки до оси вращения. Тогда момент импульса тела будет равен



$$L = \sum_{i=1}^{N} L_i = \sum_{i=1}^{N} m_i v_i R_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \omega R_i^2 .$$

Вынося за знак суммы угловую скорость, получим

$$L = \omega \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 .$$

Здесь появилась новая величина, с которой мы до сих пор не сталкивались и которая является характеристикой тела только при вращательном движении. Она называется **моментом инерции абсолютно твердого тела относительно оси**

$$\boxed{I = \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2},$$

который равен *сумме произведений масс материальных точек, составляющих тело, на квадрат расстояния от этих точек до оси вращения*.

Тогда **момент импульса твердого тела относительно оси** будет равен *произведению момента инерции тела относительно этой оси на угловую скорость вращения*

$$\boxed{L = I\omega}.$$

Введенный **момент инерции тела** при вращательном движении имеет такое же значение, какое имеет масса тела при поступательном движении, то есть момент инерции служит *количественной мерой инертных свойств тела*, только уже при вращательном движении. Можно сравнить, для примера, выражения $L = I\omega$ и $p = mv$.

Теперь найдем **основной закон динамики вращательного движения абсолютно твердого тела**, который является вращательным аналогом второго закона Ньютона. Для этого поступим так же, как мы поступали при получении второго закона Ньютона для системы N материальных точек.

Воспользуемся вращательным аналогом второго закона Ньютона для материальной точки, записанном в виде $\frac{dL}{dt} = F_\tau R$. Для i-й материальной точки твердого тела выражение примет вид $\frac{dL_i}{dt} = \sum_{k=1,k\neq i}^{N-1} F_{ik_\tau} R_i + F_{i_\tau} R_i$. Здесь мы разложили суммарный момент сил, действующих на тело, на суммарный момент внутренних сил $\sum_{k=1,k\neq i}^{N-1} F_{ik_\tau} R_i$ и суммарный момент внешних сил $F_{i_\tau} R_i$. Сложим полученные выражения для всех материальных точек тела и получим

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{dL_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1,k\neq i}^{N-1} F_{ik_\tau} R_i + \sum_{i=1}^{N} F_{i_\tau} R_i .$$

Упростим правую часть. Раскроем первое слагаемое в правой части

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1,k\neq i}^{N-1} F_{ik_\tau} R_i = \left(F_{12_\tau} R_1 + F_{21_\tau} R_2\right) + \ldots + \left(F_{ik_\tau} R_i + F_{ki_\tau} R_k\right) + \ldots$$

Запишем, в соответствии с определением момента силы относительно оси, выражения в скобках иначе $F_{ik_\tau} R_i + F_{ki_\tau} R_k = F_{ik} D_i + F_{ki} D_k$, где D_i и D_k – плечи сил, соответственно F_{ik} и F_{ki}. Но силы F_{ik} и F_{ki} по третьему закону Ньютона направлены в противоположные стороны вдоль одной прямой, следовательно, плечи этих сил равны $D_i = D_k$ и, кроме того, $F_{ik} = -F_{ki}$. Тогда

$$F_{ik} D_i + F_{ki} D_k = D_i (F_{ik} + F_{ki}) = D_i (F_{ik} - F_{ik}) = 0 .$$

Следовательно, суммарный момент внутренних сил, действующих на тело, равен нулю, $\sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1,k\neq i}^{N-1} F_{ik_\tau} R_i = 0$, и ***основной закон динамики вращательного движения*** **для абсолютно твердого тела** примет вид

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{dL_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} F_{i_\tau} R_i \quad \text{или} \quad \boxed{\frac{dL}{dt} = M}.$$

Здесь $L = \sum L_i$ – суммарный момент импульса тела, $M = \sum M_i = \sum_{i=1}^{N} F_{i_\tau} R_i$ – суммарный момент приложенных к телу внешних сил, определенный относительно неподвижной оси.

Скорость изменения момента импульса абсолютно твердого тела равна суммарному моменту внешних сил, приложенных к телу – **основной закон динамики вращательного движения твердого тела**.

Используя момент инерции, основной закон динамики вращательного движения можно переписать в виде

$$\frac{d(I\omega)}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\varepsilon = M \ .$$

Мы учли, что для абсолютно твердого тела $I = const$, и момент инерции внесли под знак производной.

По аналогии с основным законом поступательного движения его можно сформулировать так: *угловое ускорение тела прямо пропорционально результирующему моменту всех внешних сил, действующих на тело, определенному относительно неподвижной оси вращения, и обратно пропорционально моменту инерции тела, определенному относительно той же оси*

$$\boxed{\varepsilon = \frac{M}{I}}.$$

Если основной закон динамики вращательного движения твердого тела, записанный в виде $\frac{dL}{dt} = M$, применить для замкнутой системы материальных точек, на которую не действуют внешние силы $M = 0$, то из него следует **закон сохранения момента импульса – в замкнутой системе** *(на которую не действуют внешние силы) векторная сумма моментов импульсов тел со временем не меняется*

$$\boxed{\textit{Если } M = 0\textit{, то } L = \sum_{i=1}^{N} L_i = \sum_{i=1}^{N} I_i\omega_i = const}.$$

Закон сохранения момента импульса будет справедлив и для незамкнутых систем, если суммарный момент внешних сил равен нулю.

Хотя мы записали закон сохранения момента импульса после основного закона динамики вращательного движения, так же как и при поступательном движении, закон сохранения, в данном случае закон сохранения момента импульса, имеет более фундаментальное значение, чем законы динамики.

При получении основных соотношений вращательного движения мы ввели ***момент инерции твердого тела***, но ничего не говорили о том, как вычислять его для конкретных тел. Вернемся к этому вопросу.

Рассмотрим сначала тело произвольной формы и будем исходить из определения $I = \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2$. Переходя к пределу бесконечно большого числа материальных точек физически бесконечно малого объема, получим

$$\boxed{I = \lim_{m_i \to 0} \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 = \int r^2 dm} \quad \text{или} \quad \boxed{I = \int r^2 dm}.$$

Или, записывая через плотность тела $\rho = \frac{dm}{dV}$, $\boxed{I = \int \rho r^2 dV}$.

Величины ρ и R являются функциями координат точек тела, то есть, например, декартовых координат x, y, z.

В общем случае для тел сложной формы вычисление интеграла оказывается математически весьма трудоемким, причем результат не всегда представим в аналитических функциях.

Для простых симметричных тел при нахождении момента инерции относительно оси симметрии интегралы легко вычисляются. Приведем результаты вычисления момента инерции относительно осей симметрии для часто встречающихся тел вращения.

Момент инерции бесконечно тонкого кольца массой m, радиусом R относительно оси симметрии, перпендикулярной плоскости кольца, будет равен

$$I_К = mR^2.$$

Момент инерции диска (цилиндра) массой m, радиусом R относительно оси симметрии, направленной вдоль направляющей цилиндра, будет равен

$$I_Д = \frac{1}{2} mR^2.$$

Момент инерции бесконечно тонкого стержня массой m, длиной l относительно оси, проходящей через середину стержня и перпендикулярной ему, будет равен

$$I_{СТ} = \frac{1}{12} ml^2.$$

Момент инерции шара массой m, радиусом R относительно оси симметрии будет равен

$$I_Ш = \frac{2}{5} mR^2.$$

Все приведенные выше моменты сил вычислены относительно осей, проходящих через центр масс. Момент инерции относительно оси, не проходящей через центр масс, можно найти по **теореме Штейнера** – *момент инерции относительно произвольной оси равен сумме момента инерции* I_0 *относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния* a *между осями*

$$\boxed{I = I_0 + ma^2}.$$

Таким образом, теорема Штейнера, по существу, сводит вычисления момента инерции относительно произвольной оси к вычислению момента инерции относительно оси, проходящей через центр масс тела.

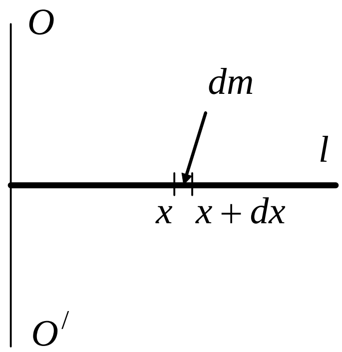
Для примера найдем момент инерции бесконечно тонкого стержня относительно оси OO', проходящей через конец стержня перпендикулярно ему.

1) *По определению момента инерции*

$$I=\int r^2 dm=\int x^2\frac{dx}{l}m=\frac{m}{l}\int_0^l x^2 dx=\frac{1}{3}ml^2 .$$

2) *По теореме Штейнера*

$$I=I_0+ma^2=\frac{1}{12}ml^2+m\left(\frac{l}{2}\right)^2=\frac{1}{3}ml^2.$$



В завершение найдем кинетическую энергию абсолютно твердого тела, вращающегося относительно неподвижной оси. Каждая материальная точка тела обладает кинетической энергией

$$E_{кин_i}=\frac{m_i v_i^2}{2}=\frac{m_i\omega^2R_i^2}{2}.$$

Кинетическая энергия тела равна *сумме кинетических энергий всех материальных точек*

$$E_{кин}=\sum_{i=1}^{N}E_{кин\,i}=\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i\omega^2R_i^2}{2}=\frac{\omega^2}{2}\sum_{i=n}^{N}m_iR_i^2 \quad \text{или} \quad \boxed{E_{кин}=\frac{I\omega^2}{2}}.$$

Обратим внимание, что полученное выражение аналогично выражению для кинетической энергии при поступательном движении $E_{кин}=\dfrac{mv^2}{2}$.

Если тело участвует в поступательном и вращательном движении, его движение можно представить как поступательное движение центра масс и вращение относительно оси, проходящей через центр масс. Тогда скорость i-й материальной точки $\vec{v}_i$ в произвольной инерциальной системе отсчета можно представить в виде $\vec{v}_i=\vec{V}+\vec{v}_i^{\,*}$, где $\vec{V}$ – скорость центра масс в этой системе отсчета, $\vec{v}_i^{\,*}$ – скорость i-й точки относительно центра масс. Полная кинетическая энергия будет равна

$$E_{кин}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{v}_i^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i(\vec{V}+\vec{v}_i^{\,*})^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_iV^2+\vec{V}\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{v}_i^{\,*}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_iv_i^{*2}.$$

Второе слагаемое равно нулю, поскольку

$$\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{v}_i^{\,*}=\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{d\vec{r}_i^{\,*}}{dt}=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{r}_i^{\,*}=\frac{dR_C^*}{dt}=0,$$

так как радиус-вектор центра масс относительно центра масс равен нулю $R_C^*=0$.

В итоге мы получаем, что *кинетическая энергия тела равна сумме кинетических энергий поступательного движения центра масс тела и суммарной кинетической энергии движения всех точек тела относительно центра масс* – **теорема Кенига**:

$$\boxed{E_{кин} = \frac{1}{2} mV^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i v_i^{*2}}.$$

Здесь $m = \sum_{i=1}^{N} m_i$ – масса тела.

Если направление оси вращения, проходящей через центр масс, не меняется, то $\vec{v}_i^* = \omega R_i^*$, где R_i^* – расстояние от i-й точки до оси вращения. Таким образом, $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^{*2} = \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{N} m_i R_i^{*2})\omega^2 = \frac{1}{2} I_0 \omega^2$, и мы получаем

$$\boxed{E_{кин} = \frac{mV^2}{2} + \frac{I_0 \omega^2}{2}},$$

где m – масса тела, V – скорость движения центра масс, ω – угловая скорость вращения относительно оси, проходящей через центр масс, I_0 – момент инерции относительно этой же оси. Первое слагаемое представляет собой ***кинетическую энергию поступательного движения тела***, второе – ***кинетическую энергию вращательного движения относительно оси, проходящей через центр масс***.

Например, кинетическая энергия катящегося без проскальзывания шара будет равна

$$E_{кин} = \frac{mV^2}{2} + \frac{2}{5} mR^2 \frac{\omega^2}{2} = \frac{7}{10} mV^2.$$

При вращательном движении, как и при поступательном движении, справедлива **теорема об изменении кинетической энергии**

$$\Delta E_{кин} = E_{кин_2} - E_{кин_1} = A,$$

где A – суммарная работа всех сил.

При нахождении работы следует иметь в виду, что при вращении тела так же, как и при поступательном движении, **внутренние силы** *работы не совершают,* **работа внешних сил** определяется выражением

$$\boxed{A = \int \delta A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi}.$$

Мощность, равная скорости совершения работы, при вращательном движении находится из выражения

$$\boxed{P = \frac{\delta A}{dt} = \vec{M}\vec{\omega}}.$$

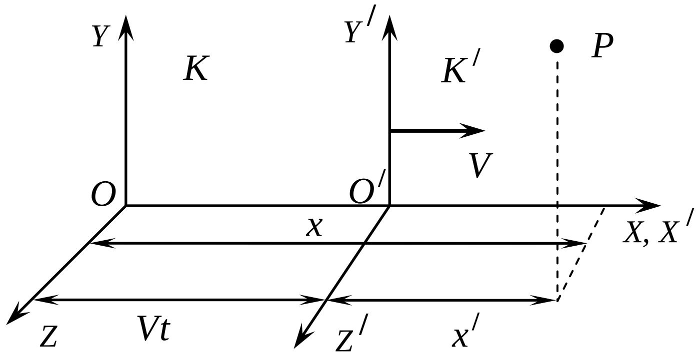
Тема: **Элементы специальной теории относительности**

Вопросы:
1. *Принцип относительности Галилея.*
2. *Постулаты специальной теории относительности.*
3. *Преобразования Лоренца координат и скоростей.*
4. *Эффект замедления времени.*
5. *Эффект сокращения длины.*
6. *Релятивистская масса и импульс.*
7. *Энергия покоя. Релятивистская кинетическая энергия.*

В предыдущих темах мы рассматривали движение тел, не делая никаких оговорок о величине скорости движения, как бы предполагая, что полученные выражения справедливы при любой скорости. Но это не так. Механика, с которой мы до сих пор имели дело, называется **классической** или **ньютоновской механикой**. Ее законы справедливы при не очень больших скоростях. В этой теме мы рассмотрим ограничения классической механики и элементы более общей теории, законы которой справедливы при любых скоростях – **релятивистской механики**, а именно ее части, рассматривающей движение относительно инерциальных систем отсчета – **специальной теории относительности**.

Поскольку движение происходит в пространстве и во времени, основой механики являются представления о пространстве и времени.

В основу классической механики, созданной Ньютоном, были положены представления о пространстве и времени, взятые из повседневного житейского опыта. Посмотрим, к каким результатам они приводят. Поскольку законы Ньютона справедливы в инерциальных системах отсчета, описание будем вести в инерциальных системах отсчета.



Рассмотрим две инерциальные системы отсчета, движущиеся друг относительно друга с постоянной скоростью V. Одну из этих систем обозначим буквой K и будем условно считать неподвижной. Вторая система $K^{/}$ будет двигаться прямолинейно и равномерно относительно первой. Выберем координатные оси X, Y, Z системы K и оси $X^{/}$, $Y^{/}$, $Z^{/}$ системы $K^{/}$, так чтобы X и $X^{/}$ совпадали, а оси Y и $Y^{/}$, а также Z и $Z^{/}$ были параллельны друг другу.

Найдем связь между координатами x, y, z некоторой точки P в системе K и координатами $x^{/}$, $y^{/}$, $z^{/}$ той же точки в системе $K^{/}$.

Если начать отсчет времени с момента, когда начала координат обеих систем совпадали, то $x = x^{/} + Vt$.

Кроме того, очевидно, что $y = y^{/}$ и $z = z^{/}$.

Добавив к этим соотношениям принятое в классической механике предположение, что время в обеих системах течет одинаковым образом, то есть $t = t'$, тогда получим преобразования координат, называемые **преобразованиями Галилея для координат и времени**,

$$\boxed{x = x' + Vt,\ y = y',\ z = z',\ t = t'}.$$

Продифференцировав записанные соотношения по времени, найдем связь между скоростями точки P по отношению к системам отсчета K и K' – **преобразования Галилея для скоростей**:

$$\boxed{v_x = v'_x + V,\ v_y = v'_y,\ v_z = v'_z}.$$

Три скалярных соотношения для проекций скоростей эквивалентны одному соотношению между вектором скорости $\vec{v}$ относительно системы K и вектором скорости $\vec{v}'$ относительно системы K':

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}}.$$

Уравнения динамики не изменяются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, то есть, как говорят, они инвариантны по отношению к преобразованию координат, соответствующему переходу от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Положение о том, что *все механические явления в различных инерциальных системах отсчета протекают одинаковым образом, вследствие чего никакими механическими опытами невозможно установить, покоится данная система отсчета или движется прямолинейно и равномерно*, называется – **принципом относительности Галилея**.

Из того, что законы механики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета (ИСО), следует важный вывод – ни одна из ИСО ничем не выделена по сравнению с любой другой ИСО. То есть все ИСО эквивалентны, нет системы отсчета, которая бы находилась в состоянии абсолютного покоя.

Во второй половине XIX века уверенность в правильности этих представлений несколько пошатнулась. К тому времени Дж. К. Максвеллом (J. Maxwell, 1831–1879) была создана теория электромагнетизма (элементы этой теории мы рассмотрим позже, во второй части нашего курса, здесь же мы упоминаем эту теорию лишь в связи с ролью, которую она сыграла в создании специальной теории относительности). Теория Максвелла предсказывала, что скорость света должна быть равна $v = 3{\cdot}10^8\ м/с$ без указания системы отсчета. Из этого следовало, что должна существовать некоторая выделенная система отсчета, в которой скорость света имела бы такое значение. Кроме того, оказалось, что полученные Максвеллом уравнения не удовлетворяют принципу относительности – они записываются неодинаково в разных системах отсчета, причем наиболее просто – в той ИСО, где скорость света равна $3 \cdot 10^8\ м/с$.

В сложившейся ситуации нужно было выбирать или принцип относительности (имевший фундаментальное значение до того времени), или теорию Максвелла (которая подтверждалась экспериментами). Попытки пересмотреть принцип относительности и экспериментально обнаружить выделенную систему отсчета, «предсказанную» теорией Максвелла, не увенчались успехом.

Радикальный выход из сложившегося положения был предложен в 1905 году Альбертом Эйнштейном (A. Einstein, 1879–1955). В созданной им *специальной теории относительности* он совместил и принцип относительности, и результаты, полученные теорией Максвелла. Для этого ему пришлось отказаться от, казалось бы, незыблемых классических представлений о пространстве и времени, основанных на повседневном опыте и здравом смысле.

Рассмотрим основные представления **специальной теории относительности** (СТО). Начнем с ее постулатов.

Первый постулат специальной теории относительности.

Все явления природы протекают одинаково в разных инерциальных системах отсчета, все законы природы инвариантны по отношению к переходу от одной инерциальной системы к другой, все инерциальные системы отсчета равноправны, среди них нет привилегированных.

Этот постулат распространяет принцип относительности Галилея за пределы классической механики.

Второй постулат специальной теории относительности.

Скорость света в вакууме одинакова во всех инерциальных системах отсчета и не зависит от движения источника и приемника света.

Два этих постулата образуют основу СТО.

Как следует из постулатов, скорость света, полученная в уравнениях Максвелла, есть скорость света в любой инерциальной системе отсчета. Но тогда должен нарушаться классический закон сложения скоростей.

Действительно, возьмем уже рассмотренные инерциальные системы отсчета K и K'. Закон сложения скоростей классической механики $v_x = v'_x + V$ не может выполняться в специальной теории относительности, поскольку, если $v_x = c$, то $v'_x = c + v_x > c$, что противоречит второму постулату. Поэтому преобразования Галилея, из которых вытекает классический закон сложения скоростей, в СТО должны быть заменены новыми, не противоречащими постулатам специальной теории относительности. Они были получены в 1904 году Хендриком Лоренцем (H. Lorentz, 1853–1928), еще до создания специальной теории относительности для объяснения отрицательного результата в экспериментах по обнаружению выделенной ИСО.

Преобразования Лоренца координат и времени

Прямые преобразования ($K' \to K$*)*:

$$\boxed{x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},\ y = y',\ z = z',\ t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}}.$$

Обратные преобразования ($K \to K'$*)* можно получить сменой знака скорости V и переносом штрихов:

$$\boxed{x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},\ y' = y,\ z' = z,\ t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}}.$$

Преобразования записаны для тех же систем отсчета K и K', которые мы ввели при рассмотрении преобразований Галилея. Здесь V – скорость движущейся системы отсчета, c – скорость света.

Записанные преобразования не противоречат постулатам специальной теории относительности, но из них получается, что время в различных системах отсчета течет неодинаково.

Из преобразования координат и времени Лоренца может быть получен **релятивистский закон сложения скоростей**:

$K' \to K$

$$\boxed{v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}},\ v_y = \frac{v'_y\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}},\ v_z = \frac{v'_z\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}}.$$

Обратные преобразования можно также получить сменой знака скорости V и переносом штрихов:

$K \to K'$

$$\boxed{v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}},\ v'_y = \frac{v_y\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_x V}{c^2}},\ v'_z = \frac{v_z\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}}.$$

Релятивистский закон сложения скоростей при малых скоростях ($V << c$, $v << c$) переходит в классический закон сложения скоростей. Вместе с тем релятивистский закон подчиняется второму постулату. Например, если свет распространяется вдоль направления движения системы K', то есть $v'_x = c$ ($v'_y = 0$, $v'_z = 0$), то

$$v_x = \frac{c + V}{1 + \frac{cV}{c^2}} = \frac{c + V}{1 + \frac{V}{c}} = c,\ v_y = 0,\ v_z = 0.$$

Если свет распространяется перпендикулярно скорости $\vec{V}$ движения системы K', например, вдоль оси y, то есть, если $v'_y = c$ ($v'_x = 0$, $v'_z = 0$), то

$$v_x = V,\ v_y = c\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}},\ v_z = 0.$$

Следовательно, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{c^2 - v^2 + v^2} = c$.

Одним из важных фундаментальных результатов СТО явился отказ от представлений об абсолютности времени и пространства. Промежуток времени между событиями и одновременность событий, а также размеры тел оказались зависящими от системы отсчета. Два события, одновременные с точки зрения одного наблюдателя, не обязательно должны быть одновременными с точки зрения наблюдателя, находящегося в другой системе отсчета. Естественно, что оба наблюдателя будут правы, так как **одновременность событий – понятие относительное**.

Рассмотрим два основных релятивистских эффекта – **эффект замедления времени** и **эффект сокращения длины**.

1. *Эффект замедления времени*

Пусть в некоторой точке с координатой x, покоящейся в системе отсчета K, происходят два события, промежуток времени между которыми $\tau = t_2 - t_1$. Этот интервал времени в системе K' будет равен $\tau' = t'_2 - t'_1$. Здесь

$$t'_1 = \frac{t_1 - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad t'_2 = \frac{t_2 - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Подставляя, получим $\boxed{\tau' = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} > \tau}$.

Аналогичный результат получим, если события происходят в одной точке x' системы K'. В любом случае, *промежуток времени между событиями, измеренный в системе отсчета, в которой события происходят в одной точке, будет наименьшим*. Этот интервал времени τ называют **собственным временем**. Другими словами, движущиеся часы идут медленнее покоящихся – *время при движении замедляется*.

С этим эффектом связан так называемый ***парадокс близнецов***. Как следует из СТО, если один из двух близнецов улетит на ракете со скоростью, близкой к скорости света, и вернется, то он будет моложе своего брата, оставшегося на Земле. Парадокса в этом нет, это следствие эффекта замедления времени.

Кажущийся парадокс заключается в другом. Если мы перейдем в систему отсчета, связанную с ракетой, и будем ее считать неподвижной, а Землю – движущейся, то тогда моложе должен быть брат, оставшийся на Земле. Возникает, вроде бы, противоречие. Какой же из братьев будет моложе? На самом деле противоречия нет. Системы отсчета, связанные с Землей и ракетой, неравноправны и ссылка на эффект замедления времени в системе отсчета, связанной с ракетой, некорректна, так как эта система отсчета не является инерциальной. Ракета часть своего пути движется с ускорением (разгоняется, разворачивается и тормозит). Рассмотрение эффекта замедления времени с точки зрения брата на ракете выходит за рамки специальной теории относительности и может быть проведено только в общей теории относительности, которая описывает движение в неинерциальных системах отсчета, – там результат получается такой же, какой мы получили в первом случае – близнец на ракете будет моложе своего брата.

2. *Эффект сокращения длины*

Не только временные интервалы различны в разных системах отсчета. Пространственные интервалы (длины и расстояния) также неодинаковы.

Измерим длину стержня, расположенного вдоль сонаправленных осей X' и X. Пусть стержень покоится относительно системы K', в которой его длина $L_0 = x_2' - x_1'$, где x_1' и x_2' – координаты концов стержня, которые не изменяются со временем и могут быть измерены в любой момент времени. В системе K, относительно которой стержень движется со скоростью V, его длина будет $L = x_2 - x_1$, где x_1 и x_1 – координаты концов стержня, измеренные в один и тот же момент времени t.

Тогда

$$L_0 = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - \frac{x_1 - Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{L}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

или $$\boxed{L = L_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Таким образом, *длина стержня, измеренная в системе отсчета, в которой он покоится*, называемая **собственной длиной**, *будет наибольшей*. Когда тело движется, оно короче (в направлении движения), чем когда оно покоится – происходит *сокращение длины тел в направлении движения*.

Поперечные размеры тел, как следует из преобразований Лоренца, не меняются:

$$y_2' - y_1' = y_2 - y_1,\quad z_2' - z_1' = z_2 - z_1.$$

Как следует из постулатов СТО, все законы физики должны быть инвариантны по отношению к преобразованиям Лоренца.

Но второй закон Ньютона в таком виде $\frac{d(m_0\vec{v})}{dt} = \vec{F}$ инвариантен по отношению к преобразованию Галилея, но не Лоренца, поскольку время в различных системах разное, и производные $\frac{d}{dt}$ и $\frac{d}{dt'}$ в общем случае не будут совпадать. Здесь m_0 мы обозначили инертную массу, введенную в классической механике.

В специальной теории относительности было получено выражение **второго закона Ньютона**, *инвариантное по отношению к преобразованиям Лоренца*, в виде:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \vec{F}}.$$

Выражение, стоящее под знаком производной, называется **релятивистским импульсом**:

$$\boxed{\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m\vec{v}}.$$

Для релятивистского импульса второй закон Ньютона имеет знакомый вид

$$\boxed{\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}}.$$

Только мерой инертности (массой m) в СТО является другая величина

$$\boxed{m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}},$$

которая называется **релятивистской массой** частицы, движущейся со скоростью v. *Классическая (нерелятивистская) масса* m_0 получила название **массы покоя**.

Свойства релятивистской массы:

1) при $v = 0$ релятивистская масса совпадает с классической – $m = m_0$,
2) при $v << c$ релятивистская масса близка классической – $m \approx m_0$,
3) при $v \to c$ релятивистская масса стремится к бесконечности – $m \to \infty$.

Из выражения для релятивистской массы следует, что скорость света c не достижима для частиц вещества. Их масса покоя не равна нулю, следовательно, релятивистская масса должна быть равна бесконечности при $v = c$.

Кинетическая энергия также зависит от системы отсчета, и классическое выражение для кинетической энергии не обязательно справедливо в СТО.

Найдем выражение для кинетической энергии, на основании положений СТО. Воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии, которая выполняется в СТО. Тогда кинетическую энергию можем найти, вычислив работу, затраченную на ускорение тела из состояния покоя до скорости v. Рассмотрим движение вдоль оси X

$$E_{кин} = \int F dx = \int \frac{dp}{dt} dx = \int \frac{dp}{dt} v dt = \int v dp.$$

Интегрируем от $v = 0$ до $v = v$, учитывая, что $d(pv) = vdp + pdv$ или $vdp = d(pv) - pdv$, тогда

$$E_{кин} = \int d(pv) - \int pdv = \int_0^v d\left(mv^2\right) - \int_0^v mvdv = mv^2 - \int_0^v \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} vdv.$$

Так как $\frac{d}{dv}\left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) = -\frac{v}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, то $\int_0^v \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} vdv = -m_0 c^2 \int_0^v d\left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)$.

И мы получаем

$$E_{кин} = mv^2 + \left(m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) \Bigg|_0^v = mv^2 + m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - m_0 c^2 .$$

Поскольку $m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = mc^2 - mv^2$, окончательное выражение для **р е л я т и в и с т с к о й   к и н е т и ч е с к о й   э н е р г и и** будет иметь вид:

$$\boxed{E_{кин} = mc^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)}.$$

Здесь *энергия тела при нулевой скорости его движения,* $v = 0$, называется **э н е р г и е й   п о к о я**

$$\boxed{E_0 = m_0 c^2}.$$

Суммарная энергия покоя и энергия движения (кинетическая энергия) тела называется **п о л н о й   э н е р г и е й   т е л а** $\boxed{E = E_{кин} + E_0}$.

Полная энергия будет равна $\boxed{E = mc^2}$. Мы получили уравнение Эйнштейна связи энергии и массы.

При малых скоростях $\frac{v}{c} << 1$ справедливо приближенное равенство $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$, так как $(1 + x)^n = 1 + nx + \ldots$, при $x << 1$. Тогда кинетическая энергия при малых скоростях, много меньших скорости света, может определяться по известной нам классической формуле

$$E_k = m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \ldots - 1 \right) \approx \frac{1}{2} m_0 v^2 ,$$

которая, как мы теперь видим, является частным случаем релятивистского выражения для кинетической энергии. И это относится не только к кинетической энергии. Все классические формулы и законы имеют или такой же вид, как в СТО, или являются частным случаем релятивистских выражений в приближении малых скоростей.

Соотношение классической и релятивистской механики иллюстрирует важный принцип физики – **п р и н ц и п   с о о т в е т с т в и я**: *новые теории не должны отвергать старые, старые теории должны вытекать из новых, как частные случаи.*

Тема: **Механические колебания**

Вопросы:

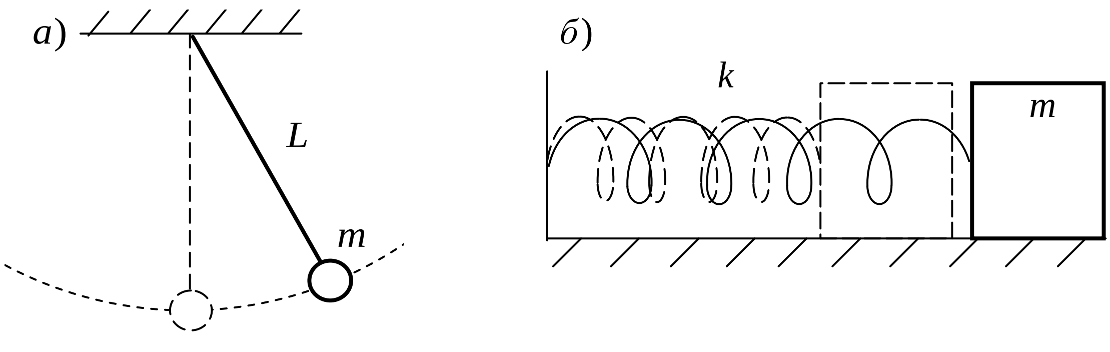
1. *Колебательные процессы, их характеристики. Примеры механических колебательных систем.*
2. *Способы описания и изображения колебаний.*
3. *Классификация колебательных процессов.*
4. *Гармонические колебания. Уравнение колебаний. Характеристики.*
5. *Уравнение колебаний плоского гравитационного маятника.*
6. *Уравнение колебаний пружинного маятника.*
7. *Сложение гармонических колебаний одного направления.*
8. *Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний.*
9. *Уравнение, описывающее затухающие колебания и его решение.*
10. *Затухающие колебания. Характеристики затухания.*
11. *Вынужденные колебания при гармоническом воздействии.*
12. *Резонанс вынужденных колебаний.*

Колебаниями, или **колебательными процессами**, называются *процессы, в которых значения параметров состояния системы периодически повторяются*.

Такими свойствами обладают, например, качание маятника часов, колебания ножек камертона или струны, напряжение между обкладками конденсатора в контуре радиоприемника и т. д. Простейшими механическими колебательными системами являются:

а) плоский гравитационный маятник, частным случаем которого является математический маятник – материальная точка массой m на нерастяжимой и невесомой нити длиной L, совершающая колебания в вертикальной плоскости;

б) пружинный маятник – тело массой m, прикрепленное к пружине жесткостью k, совершающее колебания в горизонтальном направлении.



Исходя из определения колебательного процесса, следует, что его основной характеристикой является промежуток времени, через который значения параметра состояния системы повторяются – **период** T – *время одного колебания*. С периодом связана другая важная характеристика – **частота колебаний** ν – *количество колебаний в единицу времени*. Так как $T = \dfrac{t}{n}$, где n – число колебаний за время t, а $\nu = \dfrac{n}{t}$, то частота колебаний и период связаны соотношением $\boxed{T = \dfrac{1}{\nu}}$.

Кроме частоты колебаний используют **циклическую (круговую) частоту** ω, которая связана с периодом и частотой колебаний выражением

$$\boxed{\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}}.$$

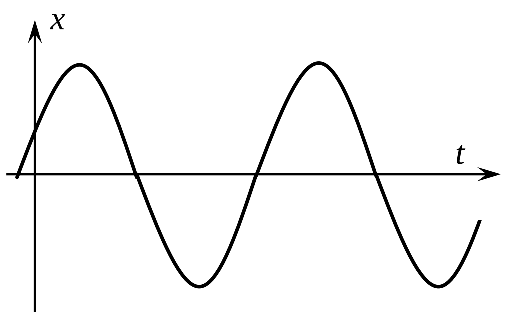
Любая функция $x(t)$, обладающая свойством периодичности (повторяемости) $x(t+T) = x(t)$, будет описывать некоторый колебательный процесс. Здесь x – периодически изменяющийся параметр состояния системы.

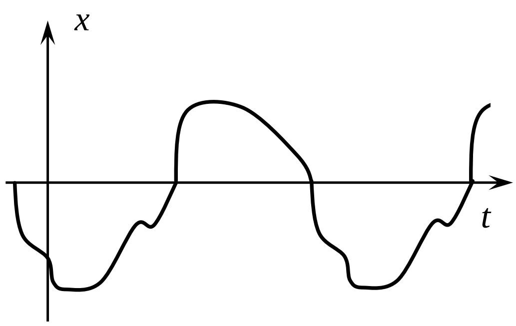
Для колебаний можно использовать несколько ***способов описания колебательного процесса***.

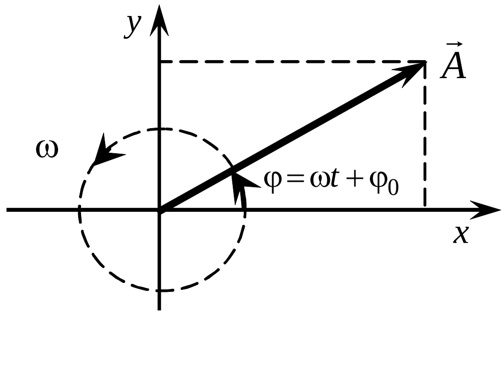
1. Описание колебаний *через явное задание функции* $x(t)$ называется **аналитическим**. Например, аналитическое выражение $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ описывает гармоническое колебание.
2. Другой способ описания колебания – **экспоненциальный**, в котором колебательный процесс задается с помощью комплексной функции вида $Z = Ae^{i(\omega t+\varphi_0)}$. Если величина A, стоящая перед экспонентой, будет постоянной и вещественной, то вещественная часть Z и мнимая часть Z будут описывать некоторые гармонические колебания $x(t) = \operatorname{Re} Z = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ и $y(t) = \operatorname{Im} Z = A\sin(\omega t + \varphi_0)$. В общем случае величина A может быть функцией времени и колебания не гармонические.
3. Третий способ описания колебаний – с помощью **уравнения фазовой траектории**, связан с изображением колебательных процессов на фазовой плоскости.

Каждому способу описания колебательного процесса соответствует свой ***способ изображений колебаний.***

1) С помощью $x-t$-**диаграммы** – кривой, изображающей процесс на координатной плоскости (x,t).





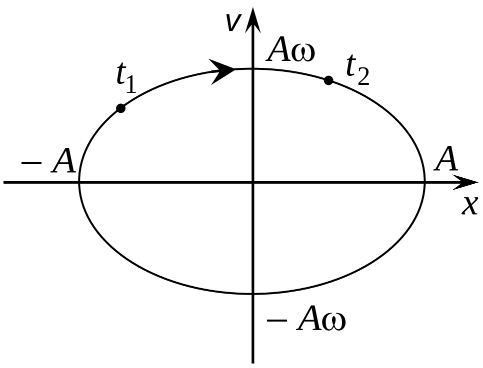


2) С помощью **векторных диаграмм**. Колебания представляют собой проекции вращающегося с угловой скоростью ω вектора $\vec{A}$:

$$x(t) = A\cos\varphi = A\cos(\omega t + \varphi_0),$$
$$y(t) = A\sin\varphi = A\sin(\omega t + \varphi_0).$$

В общем случае длина вектора может быть функцией времени $A(t)$.

3) С помощью фазовой траектории **на фазовой плоскости**. В каждый момент времени t состояние колебательной системы полностью определяется периодически изменяющимся параметром x и ее производной $v = \dfrac{dx}{dt} = \dot{x}$. Эти величины, отложенные на координатных осях, определяют фазовую плоскость. Поскольку $x(t)$ и $v(t)$ функции периодичны, то *совокупность состояний колебательной системы образует замкнутую кривую на фазовой плоскости, называемую* **фазовой траекторией**.



Фазовая трактория гармонического колебания $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ представляет собой эллипс, уравнение которого имеет вид

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{A^2\omega^2} = 1.$$

Все колебательные процессы можно разделить по типам колебаний. Признаки, по которым классифицируют колебания, различны.

По ***форме*** $x-t$***-диаграммы*** колебания делятся на треугольные, прямоугольные, гармонические и т. п.

В зависимости от ***физической природы*** повторяющегося процесса различают колебания *механические и электромагнитные*.

В зависимости от ***характера воздействия*** на колеблющуюся систему различают *свободные колебания, вынужденные колебания, автоколебания и параметрические колебания*.

Свободными или **собственными** называются *колебания, которые происходят в системе, предоставленной самой себе после того, как она была выведена из положения равновесия*.

Вынужденными называют такие *колебания, в процессе которых колеблющаяся система подвергается внешнему периодически изменяющемуся воздействию*. Частота вынужденных колебаний совпадает с частотой внешнего воздействия.

Автоколебания, как и вынужденные *колебания, обусловлены внешним воздействием на колеблющуюся систему, но* в автоколебаниях *внешнее воздействие является постоянным, частота колебательного процесса определяется свойствами колеблющейся системы*.

При **параметрических колебаниях** *за счет внешнего воздействия происходит периодическое изменение какого-либо параметра системы без сообщения системе энергии*, например, периодическое изменение длины нити, к которой подвешен шарик, совершающий колебания.

В нашем курсе мы рассмотрим только первые два типа колебаний.

Начнем с уже неоднократно упоминавшихся **гармонических колебаний**, то есть *колебаний, при которых колеблющаяся величина* (например, отклонение маятника от положения равновесия) *изменяется со временем по закону синуса или косинуса.*

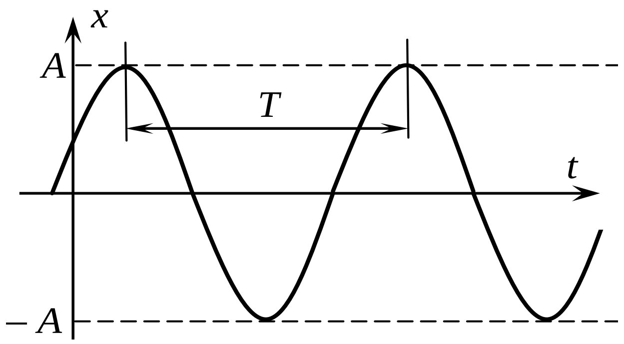
Функция, описывающая гармонические колебания, имеет вид

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)},$$

где x – периодически изменяющийся параметр системы, называемой *обобщенной координатой*, который мы будем называть ***смещением***, поскольку в этой теме мы будем иметь дело только с механическими колебаниями, ω – циклическая частота колебания, A и φ_0 – постоянные, определяемые из начальных условий.

Изучение гармонических колебаний имеет большое значение, поскольку любой периодический процесс можно представить как сумму гармоник – гармонических колебаний.

График гармонического колебания ($x - t$ ***-диаграмма***)



Поскольку косинус изменяется в пределах от –1 до +1, значения x лежат в пределах от $-A$ до A.

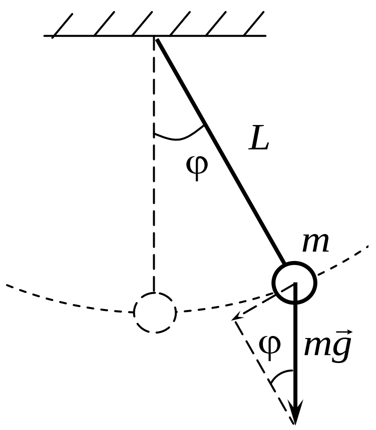
Величина A наибольшего отклонения обобщенной координаты от положения равновесия при гармонических колебаниях называется **амплитудой гармонических колебаний**. Амплитуда – постоянная положительная величина.

Величина $(\omega t + \varphi_0)$, стоящая под знаком косинуса, называется **фазой гармонического колебания**. *Постоянная φ_0 представляет собой значение фазы в момент времени $t = 0$* и называется **начальной фазой гармонического колебания**. Значение начальной фазы зависит от выбора начала отсчета времени.

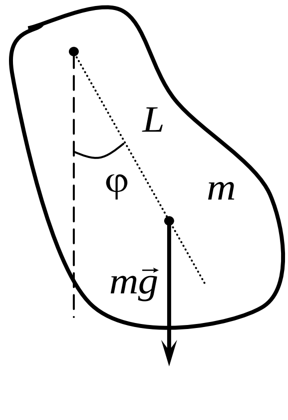
На примерах простейших колебательных систем получим уравнение колебаний и определим условия, при которых колебания будут гармоническими.

1. Плоский гравитационный маятник

Плоским гравитационным маятником называют твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной точки или оси.



математический маятник



физический маятник

Принято различать математические и физические маятники. **Математическим маятником** называют *идеализированную систему, состоящую из невесомой и нерастяжимой нити, на которой подвешена материальная точка.*

Если колеблющееся тело нельзя представить материальной точкой, маятник называют **ф и з и ч е с к и м м а я т н и к о м** .

Начнем рассмотрение с *физического маятника*.

Отклонение маятника от положения равновесия будем характеризовать углом φ, образованным прямой, проходящей через точку подвеса и центр масс, с вертикалью. При отклонении маятника от положения равновесия возникает вращающий момент силы тяжести относительно оси подвеса, равный $M = -mgL\sin\varphi$, где L – расстояние от точки подвеса до центра масс тела.

Уравнение динамики вращательного движения $I\varepsilon = M$ примет вид $I\varepsilon = -mgL\sin\varphi$ или $I\ddot{\varphi} + mgL\sin\varphi = 0$, так как угловое ускорение равно второй производной от угла, $\varepsilon = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$. Разделив на I, получим **у р а в н е н и е к о л е б а н и й ф и з и ч е с к о г о м а я т н и к а**

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgL}{I}\sin\varphi = 0.$$

При малых углах ($\varphi < 15°$) можем считать $\sin\varphi \approx \varphi$, и дифференциальное уравнение, описывающее движение, становится линейным

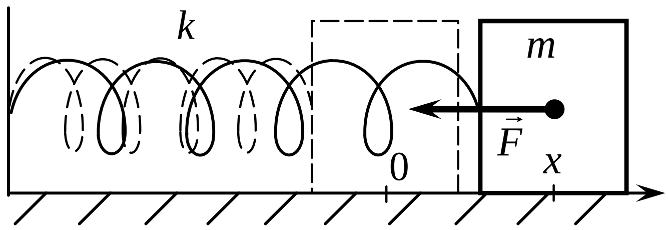
$$\ddot{\varphi} + \frac{mgL}{I}\varphi = 0.$$

Для *математического маятника* учтем, что для тела, представляющего одну материальную точку, расположенную на расстоянии L от оси, момент инерции равен $I = mL^2$, тогда **у р а в н е н и е к о л е б а н и й м а т е м а т и ч е с к о г о м а я т н и к а** будет иметь вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{L}\sin\varphi = 0 \quad \text{или при малых углах} \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{L}\varphi = 0.$$

2. Пружинный маятник

Положение груза m будем описывать смещением x от положения равновесия, равным растяжению или сжатию пружины (при сжатии смещение будет отрицательным). При растяжении или сжатии пружины на груз будет действовать возвращающая сила, *при малых смещениях* подчиняющаяся закону Гука $F = -kx$. Второй закон Ньютона в проекции на горизонтальную ось для груза будет иметь вид $ma = -kx$ или $m\ddot{x} + kx = 0$, так как ускорение равно второй производной смещения $a = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$.



Разделив на массу, получим

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

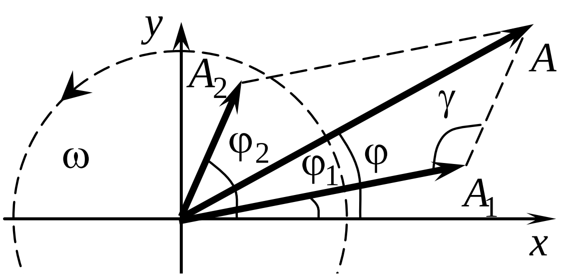
Таким образом, движение гравитационных маятников при малых углах и движение пружинного маятника при малых смещениях описывается линейным дифференциальным уравнением второго порядка вида

$$\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0}.$$

Решением этого уравнения является гармоническое колебание $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$. В этом нетрудно убедиться подстановкой, поскольку первое слагаемое после двукратного дифференцирования будет равно $\ddot{x} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi_0)$. Коэффициент перед x в уравнении имеет смысл квадрата циклической частоты.

Можем сделать вывод, что ***движение физического маятника*** при малых отклонениях (когда $\sin\varphi \approx \varphi$) будет гармоническим колебанием *с частотой* $\omega = \sqrt{\dfrac{mgL}{I}}$ и *периодом* $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{mgL}}$. ***Движение математического маятника*** при малых отклонениях будет гармоническим колебанием *с частотой* $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{L}}$ и *периодом* $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$. Для физического маятника вводят **приведенную длину физического маятника** $L_{пр} = \dfrac{I}{mL}$ *– длина эквивалентного (такой же массы и колеблющегося с той же частотой) математического маятника*. Тогда частоту и период физического маятника можно записать $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{L_{пр}}}$ и $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L_{пр}}{g}}$. Аналогично ***движение груза на пружине*** будет гармоническим колебанием при малых смещениях (должен выполняться закон Гука) *с частотой* $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ и *периодом* $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.

Мы рассматривали случаи, когда колеблющееся тело участвует в одном колебательном процессе. Допустим теперь, что материальная точка участвует в ***двух колебательных процессах***. Пусть они будут ***одного направления*** с одинаковой частотой и амплитудой $x_1(t) = A\cos(\omega t + \varphi_1)$ и $x_2(t) = A\cos(\omega t + \varphi_2)$. Тогда *результирующее движение* будет гармоническим колебанием с той же частотой $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$. Амплитуду и фазу результирующего колебания можно найти, воспользовавшись тригонометрическими соотношениями или методом векторных диаграмм. Мы применим метод векторных диаграмм.



Вектор колебания x будет суммой векторов колебаний x_1 и x_2. По теореме косинусов

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos\gamma}$$

или, так как $\gamma = \pi - (\varphi_2 - \varphi_1)$ и $\cos\gamma = -\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$,

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}\,.$$

Фазу результирующего колебания найдем из условия

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_{1y} + A_{2y}}{A_{1x} + A_{2x}} = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}\,.$$

Если материальная точка может совершать колебания, как вдоль оси x, так и вдоль перпендикулярной ей оси y, то при возбуждении обоих колебаний материальная точка будет участвовать в движении, получаемой ***сложением двух колебаний во взаимно перпендикулярных направлениях***. Она будет двигаться по некоторой криволинейной траектории, форма которой зависит от частот и разности фаз обоих колебаний.

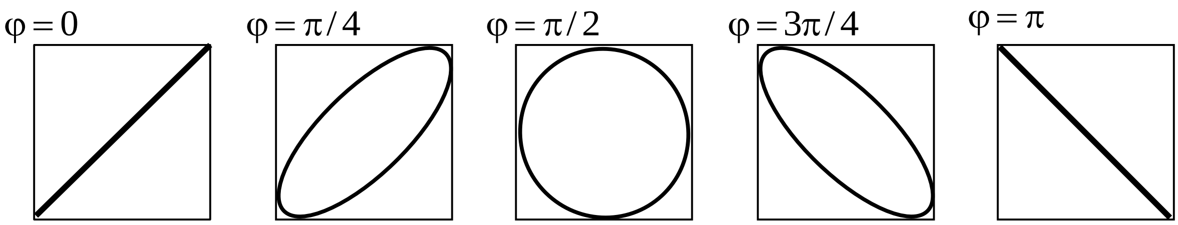
Рассмотрим случай, когда частоты колебаний вдоль осей одинаковы $\omega_x = \omega_y \equiv \omega$.

Выберем начало отсчета времени так, чтобы начальная фаза первого колебания была равна нулю. Тогда уравнения колебаний запишутся следующим образом: $x = a\cos\omega t$, $y = b\cos(\omega t + \varphi)$, где φ – разность фаз обоих колебаний. Записывая складываемые колебания в виде

$\dfrac{x}{a} = \cos\omega t$ и $\dfrac{y}{b} = \cos(\omega t + \varphi) = \cos\omega t\cos\varphi - \sin\omega t\sin\varphi$, и, заменяя во втором $\cos\omega t$ на $\dfrac{x}{a}$ и $\sin\omega t$ на $\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}$, получим уравнение траектории материальной точки

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\varphi + \frac{y^2}{a^2} = \sin^2\varphi\,,$$

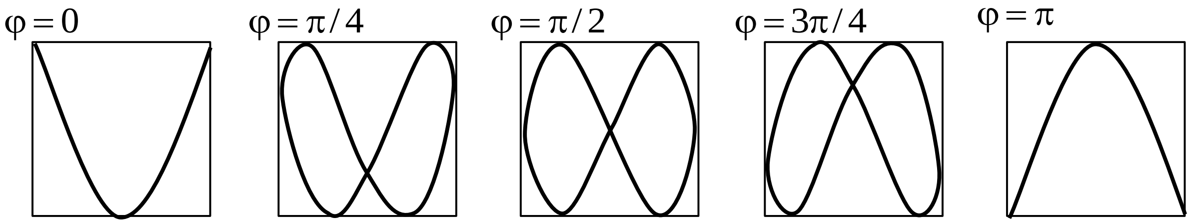
являющееся уравнением эллипса. Вид полученного эллипса зависит от амплитуд a и b и разности фаз φ. При $a = b$ получим



Если частоты взаимно перпендикулярных колебаний не одинаковы, то траектория результирующего движения имеет вид довольно сложных кривых, полученных французским физиком Жюлем-Антуаном Лиссажу (J.-A. Lissajous, 1822–1880) и называемых **фигурами Лиссажу**. При соотношении частот 1:2 ($\omega_x = \omega$, $\omega_y = 2\omega$), то есть для колебаний

$$x = a\cos\omega t\,,\; y = b\cos(2\omega t + \varphi),$$

и при $a = b$ фигуры Лиссажу имеют вид



При рассмотрении колебаний до сих пор мы не учитывали диссипативные силы (силы трения и сопротивления) и получили уравнение гармонических колебаний, которые возникают только в идеальных колебательных системах, где сохраняется полная механическая энергия. В частности, для идеального пружинного маятника, который мы рассмотрели, будет выполняться закон сохранения энергии

$$E = E_{пот} + E_{кин} = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{kA^2}{2} = \frac{mv_{\max}^2}{2}.$$

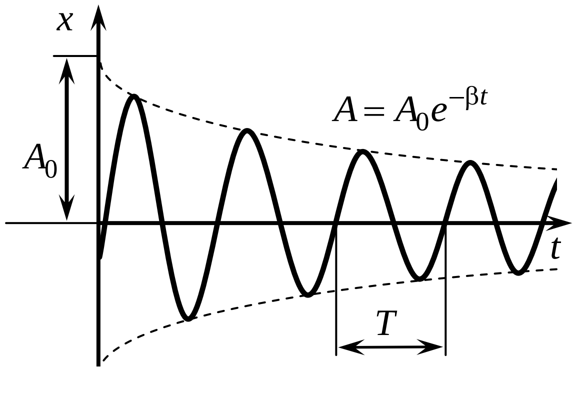
При выведении из положения равновесия не идеальной колебательной системы, а ***реальной системы***, колебаний может не быть. Это связано с большими потерями энергии. Если потери энергии не велики, то колебания могут возникнуть, но с течением времени они прекратятся. Такие колебания называются **затухающими колебаниями**.

Процессы в колебательной системе с потерями энергии, которые мы будем рассматривать, описываются уравнением

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}.$$

Второе слагаемое, которого не было в уравнении гармонических колебаний, обусловливает затухание колебательного процесса. Коэффициент β называется **коэффициентом затухания**. Величина, входящая в третье слагаемое ω_0, называется **собственной частотой системы**, которая *равна частоте свободных гармонических колебаний.*

Затухание связано с действием сил сопротивления. Приведенное уравнение получается, если сила сопротивления пропорциональна скорости, то есть $F = -r\dot{x}$. Для *пружинного маятника* коэффициент сопротивления r связан с коэффициентом затухания соотношением $\beta = \frac{r}{2m}$. Собственная частота пружинного маятника $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.



Колебательный процесс будет происходить при *не слишком сильном (докритическом) затухании* ($\beta < \omega_0$). В этом случае общее решение уравнения имеет вид **затухающих колебаний**

$$\boxed{x(t) = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)}.$$

Пунктирными линиями показана **амплитуда затухающих колебаний**

$$\boxed{A(t) = A_0 e^{-\beta t}}.$$

Частота затухающих колебаний ω равна

$$\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}},$$

период –

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}}.$$

Затухание колебаний можно характеризовать коэффициентом затухания β или **временем релаксации (постоянной времени затухания)** $\tau = \frac{1}{\beta}$, *за которое амплитуда колебаний уменьшается в* $e = 2{,}71...$ *раз*. Кроме этих величин, удобно пользоваться другими характеристиками затухания – **декрементом затухания** Θ, который равен *уменьшению амплитуды за период*

$$\boxed{\Theta = \frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T}},$$

и **логарифмическим декрементом** $\boxed{\lambda = \ln\Theta = \beta T}$.

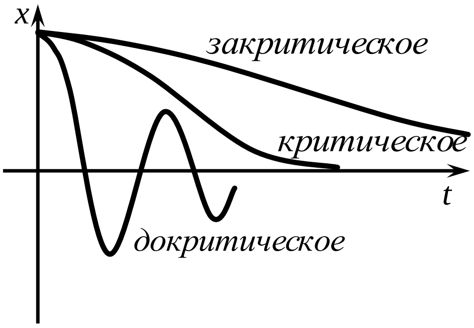
При сильном затухании ($\beta \geq \omega_0$) процесс становится ***апериодическим***.

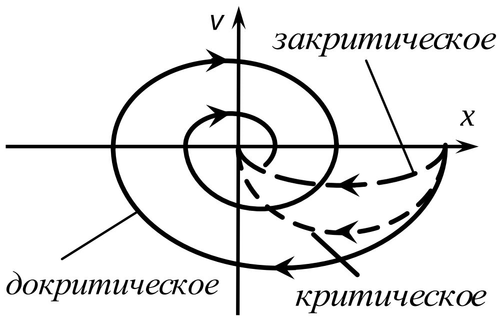
При $\beta = \omega_0$ (*критическое затухание*) – $x(t) = (A + Bt)e^{-\beta t}$.

При $\beta > \omega_0$ (*закритическое затухание*) – $x(t) = Ae^{-k_1 t} + Be^{-k_2 t}$,

где $k_{1,2} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$.

Все эти процессы при разных коэффициентах затухания на $x - t$ -диаграмме и фазовой плоскости будут иметь вид





Если кроме сил сопротивления на колебательную систему действует периодически изменяющаяся внешняя сила, то будут возникать **вынужденные колебания**.

В случае, когда **вынуждающая сила** изменяется по гармоническому закону $F(t) = F_0 \cos\omega t$, колебания описываются дифференциальным уравнением

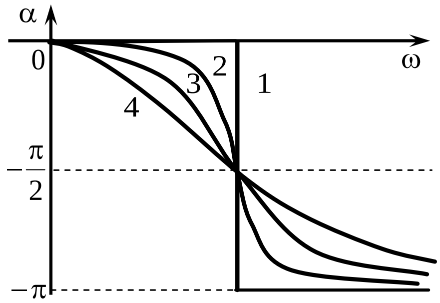
$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\omega t},$$

где $f_0 = F_0 / m$, β – коэффициент затухания, ω_0 – собственная частота системы, ω – частота ***вынуждающей силы***.

Решением этого уравнения будет сумма вынужденного и затухающего колебаний. Спустя время $t >> \tau = \dfrac{1}{\beta}$, затухающими колебаниями можно пренебречь. Тогда колебания будут только **вынужденными колебаниями**, имеющими вид

$$\boxed{x(t) = A(\omega)\cos(\omega t + \alpha(\omega))}.$$

Они будут происходить с амплитудой $A(\omega)$ и фазой $\alpha(\omega)$, зависящими от частоты вынуждающей силы. Фаза α характеризует сдвиг фаз между вынуждающей силой и смещением.

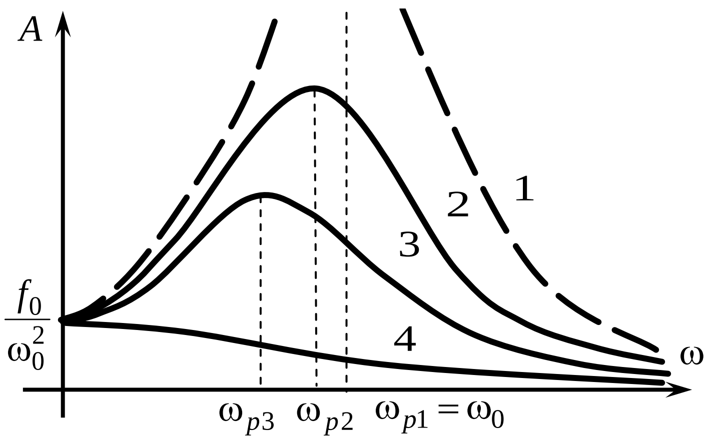


Зависимость $\alpha(\omega)$ называется **фазово-частотной характеристикой** (ФЧХ), и она имеет вид

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}}.$$

Зависимость $A(\omega)$ называется **амплитудно-частотной характеристикой** (АЧХ) и имеет вид

$$\boxed{A(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}}.$$



Приведенные зависимости соответствуют различным коэффициентам затухания

$$\beta_4 > \beta_3 > \beta_2 > \beta_1 = 0.$$

Из графика зависимости амплитуды от частоты $A(\omega)$ видно, что *при некоторой определенной для данной системы частоте амплитуда колебания может резко увеличиваться*. Это явление называется **резонансом**, а соответствующая частота – **резонансной частотой**. Чтобы определить резонансную частоту, нужно найти частоту, при которой амплитуда колебаний $A(\omega)$ достигает максимума. Условие максимума, определяющее резонансную частоту, $\dfrac{dA}{d\omega} = 0$. После дифференцирования получаем

$$-4\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\omega + 8\beta^2\omega = 0.$$

Откуда находим три решения $\omega = 0$ и $\omega = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$. Частотой, соответствующей резонансу и имеющей физический смысл, является

$$\boxed{\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}.$$

При сильном затухании $2\beta^2 > \omega_0^2$ резонанса не будет (например, зависимость $A(\omega)$, соответствующая случаю $\beta = \beta_4$).

При малом затухании амплитуда при резонансе приближенно равна

$$\boxed{A_p \approx \frac{f_0}{2\beta\omega_0}}.$$

Разделив это выражение на смещение от положения равновесия $x_0 = \frac{f_0}{\omega_0^2}$ под действием постоянной силы $F_0 = f_0 m$, получим

$$\boxed{\frac{A_p}{x_0} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{2\pi}{2\beta T} = \frac{\pi}{\lambda} = Q},$$

д о б р о т н о с т ь   к о л е б а т е л ь н о й   с и с т е м ы, которая показывает, *во сколько раз амплитуда в момент резонанса превышает смещение системы из положения равновесия под действием постоянной силы той же величины*.

Явление резонанса используется в акустике, радиотехнике и т. д.

Электричество

При рассмотрении причин движения тел мы отмечали, что взаимодействия по природе делятся на четыре типа. В механике мы рассматривали только гравитационное взаимодействие. В то же время многие силы, с которыми мы имели дело в механике, являются по своей природе электромагнитными (силы трения, давления, упругости и т. п.). Законы этого взаимодействия, играющего важную роль в макромире, – ***электромагнитного взаимодействия***, мы оставляли пока за пределами нашего внимания.

Данный раздел мы начнем с изучения этого взаимодействия тел, обусловленного наличием зарядов. Продолжим разговор уже во второй части курса физики.

В первой части нашего курса мы рассмотрим *взаимодействие и свойства систем электрических зарядов, находящихся в пустом пространстве неподвижно относительно выбранной инерциальной системы отсчета*, которыми занимается **электростатика**, рассмотрим, как изменяются законы электростатики *при наличии вещества*, а также при рассмотрении **электрического тока** познакомимся с *характеристиками и способами описания движущихся зарядов*.

Тема: **Электрическое поле в вакууме**

Вопросы:

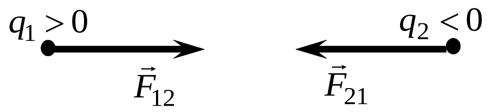
1. *Электрический заряд. Закон сохранения заряда. Закон Кулона.*
2. *Электростатическое поле. Напряженность электростатического поля. Силовые линии. Принцип суперпозиций электростатических полей.*
3. *Применение принципа суперпозиции. Расчет поля системы точечных зарядов в вакууме.*
4. *Работа по перемещению заряда в электрическом поле. Электрический потенциал. Принцип суперпозиции для потенциала.*
5. *Потенциал электрического поля точечного заряда.*
6. *Связь вектора напряженности электрического поля с распределением потенциала. Эквипотенциальные поверхности.*
7. *Поток вектора напряженности электрического поля. Теорема Гаусса.*
8. *Применение теоремы Гаусса для нахождения напряженности электрического поля.*
9. *Электрический диполь. Дипольный момент.*
10. *Электрическое поле диполя.*
11. *Диполь во внешнем электрическом поле.*

Электрический заряд – это *скалярная величина, характеризующая способность некоторых тел притягиваться или отталкиваться*. Такие тела, обладающие зарядом, называют *заряженными*. Экспериментально было установлено, что существует два типа зарядов. Один из них назвали положительным, а другой – отрицательным.

Если в некоторой области пространства находятся тела с суммарным зарядом Q, то заряд в этой области может измениться только в случае, если заряд будет перенесен через границу области. *Если заряд не пересекает границу области, то внутри области заряд изменяться не будет* – **закон сохранения заряда**.

Заряженное тело, которое может быть представлено материальной точкой, называют **точечным зарядом**. Притяжение или отталкивание точечных зарядов q_1 и q_2 описывается **законом Кулона**, установленным в 1785 году Ш. Кулоном

(S. Coulomb, 1736–1806). Если заряды одного знака ($q_1 q_2 > 0$) – они отталкиваются, если разных знаков ($q_1 q_2 < 0$) – притягиваются.



По третьему закону Ньютона $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. Сила взаимодействия направлена по прямой, соединяющей точечные заряды.

Величина кулоновской силы взаимодействия $F = \left|\vec{F}_{12}\right| = \left|\vec{F}_{21}\right|$ равна

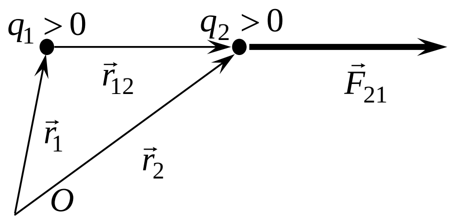
$$\boxed{F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}}.$$

Здесь r – расстояние между зарядами, $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{Кл^2}{Н \cdot м^2}$ – электрическая постоянная.

В векторном виде закон Кулона записывается так:

$$\boxed{\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^3}\vec{r}_{12}}.$$

Здесь $\vec{F}_{21}$ – сила, действующая на второй заряд со стороны первого, $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ – разность радиус-векторов зарядов и $r = \left|\vec{r}_{12}\right|$.



Закон Кулона в таком же виде справедлив и для тел со сферически симметричным распределением заряда. В этом случае r – расстояние между центрами зарядов.

Для нахождения силы взаимодействия между протяженными телами с произвольным распределением заряда, их надо представить как систему точечных зарядов. Сила, действующая на точечный заряд q_i первого тела со стороны точечного заряда q_j второго тела, равна $\vec{F}_{ij} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{r_{ji}^3}\vec{r}_{ji}$, где r_{ji} – расстояние между точечными зарядами. Для нахождения силы взаимодействия между телами необходимо найти векторную сумму сил взаимодействия между точечными зарядами (сложить по всем i и j). Такую же процедуру мы выполняли при рассмотрении закона всемирного тяготения.

Если это проделать для простых тел, но не со сферически симметричным распределением зарядов, то даже если удастся получить аналитическое выражение для силы взаимодействия этих тел, оно будет иметь другой вид, отличный от закона Кулона.

Кулоновское взаимодействие является неконтактным, для его описания (так же, как и для описания гравитационного взаимодействия) используют понятие **поля**. В данном случае – **электрическое поле**, под которым мы будем понимать *изменение свойств пространства вокруг заряда, обусловленное его наличием и проявляющееся в возникновении силы, действующей на другой заряд, помещенный в это поле*.

Если *поле не меняется со временем* (а именно такие поля мы будем рассматривать в данной теме), его называют **электростатическим полем**. Термином ***электрическое поле*** мы будем пользоваться в этой теме как синонимом.

Для характеристики электрического поля вводят **вектор $\vec{E}$ напряженности поля**. *Вектор напряженности в некоторой точке электрического поля равен силе, действующей на единичный положительный заряд, помещенный в эту точку поля.* По определению

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}}.$$

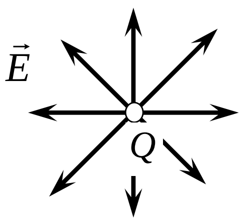
Если известна напряженность электрического поля, то сила, действующая на заряд q, будет равна $\vec{F} = q\vec{E}$. Из определения следует, что $\vec{E}$ – *силовая характеристика электрического поля*.

Напряженность поля точечного заряда Q в точке на расстоянии r от него найдем, разделив силу Кулона на заряд q, помещенный в это точку

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^3}\vec{r}}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^3}\vec{r}},$$

где $\vec{r}$ – вектор, проведенный из силового центра поля (источника поля) – заряда Q в рассматриваемую точку поля. Величина напряженности будет равна

$$\boxed{E = \left|\vec{E}\right| = \frac{\left|\vec{F}\right|}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}}.$$

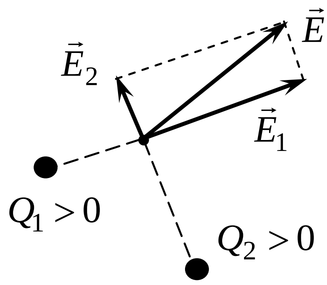


Для изображения электрического поля используют **силовые линии**. Это *линии, касательные к которым совпадают по направлению с вектором напряженности $\vec{E}$, и их плотность (густота) пропорциональна величине напряженности поля.*

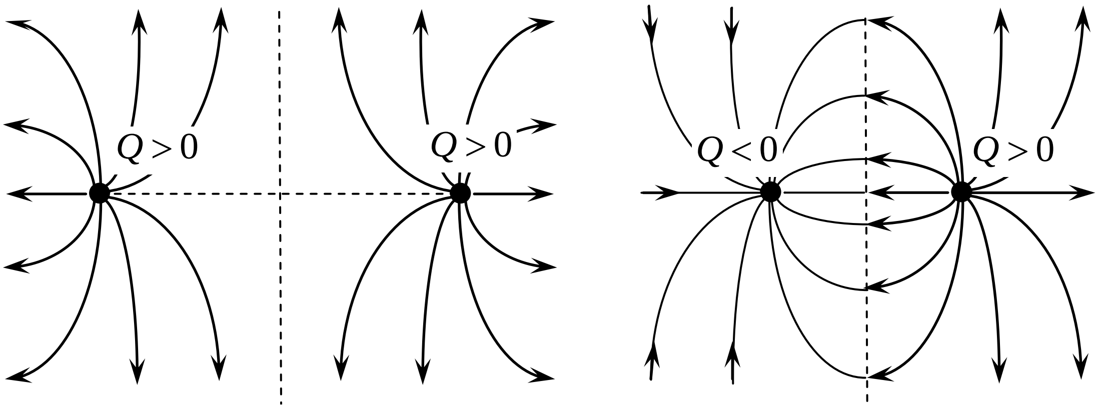
Если у нас есть не один точечный заряд Q, а система n точечных зарядов Q_i, для электрического поля выполняется **принцип суперпозиции (принцип наложения)**: *каждый заряд создает электрическое поле независимо от других зарядов (поле одного заряда не влияет на поля других зарядов), и напряженность результирующего поля системы зарядов равна векторной сумме напряженности электрических полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности*

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_1 + \ldots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i}.$$

На рисунке проиллюстрирован принцип суперпозиции для двух точечных зарядов Q_1 и Q_2. Принцип суперпозиции позволяет найти электрическое поле для любой системы зарядов, поскольку если заряды не точечные, их всегда можно свести к совокупности точечных зарядов.



Электрические поля двух одинаковых по величине зарядов, изображенные силовыми линиями, выглядят как представлено на рисунке (проверить самостоятельно):



Силовые линии не могут обрываться в пустоте, они начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных зарядах или уходят в бесконечность (или приходят из бесконечности).

Для характеристики энергетических свойств электрического поля вводят еще одну характеристику, связанную с потенциальной энергией взаимодействия зарядов – **потенциал электрического поля**.

Силы электростатического поля являются консервативными, работа этих сил при перемещении заряда не зависит от формы траектории, по которой перемещается заряд, а зависит только от начального и конечного положения заряда. Следовательно, как и для других консервативных сил, для электростатического поля можно ввести **потенциальную энергию**. *Разность потенциальной энергии* $E_{пот_1}$ *и* $E_{пот_2}$ *между точками 1 и 2 будет равна работе сил электростатического поля по перемещению заряда из точки 1 в точку 2*

$$\boxed{A_{12} = E_{пот_1} - E_{пот_2}}.$$

Эта работа зависит от величины перемещаемого заряда q. Для характеристики поля введем величину, определяемую только свойствами поля и не зависящую от величины заряда. *Это работа сил электрического поля по переносу единичного положительного заряда, которая определяет* **разность потенциалов**

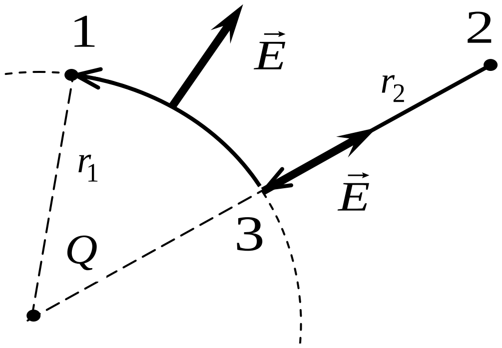
$$A_{12(ед)} = \frac{A_{12}}{q} = \frac{E_{пот_1}}{q} - \frac{E_{пот_2}}{q} = \varphi_1 - \varphi_2 = -\Delta\varphi.$$

Здесь мы ввели величину $\boxed{\varphi = \dfrac{E_{пот}}{q}}$, называемую **потенциалом электрического поля** – это *потенциальная энергия единичного положительного заряда в электрическом поле*.

Найдем потенциал поля точечного заряда.

По определению $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -A_{12(ed)} = A_{21(ed)} = \int\limits_{(2)}^{(1)} F_{ed} \cos\alpha \cdot dr$.

Так как работа не зависит от пути, то из точки 2, находящейся на расстоянии r_2 от заряда Q, мы будем перемещать заряд в точку 1 через точку 3, расположенную на прямой, соединяющей точку 2 с зарядом Q и находящуюся от него на таком же расстоянии r_1, что и точка 1. Причем из точки 2 в точку 3 будем перемещать по прямой, а из точки 3 в точку 1 – по дуге окружности. Поскольку сила F_{ed}, действующая на единичный заряд, по определению есть напряженность E, мы получим



$$A_{21(ed)} = \int\limits_{(2)}^{(3)} E \cos\alpha \cdot dr + \int\limits_{(3)}^{(1)} E \cos\alpha \cdot dr .$$

При этом работа на участке (3)-(1) будет равна нулю, так как напряженность $\vec{E}$ перпендикулярна элементарному перемещению $d\vec{r}$, и $\cos\alpha = 0$. Тогда работа на всем участке (2)-(1) будет равна работе на участке (2)-(3), на котором $\cos\alpha = -1$,

$$A_{21(ed)} = \int\limits_{(2)}^{(3)} E \cos\alpha \cdot dr = -\int\limits_{(2)}^{(3)} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

То есть мы получили $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_2} - \dfrac{1}{r_1}\right)$. Следовательно, $\varphi_1 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1}$ и $\varphi_2 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$. Для произвольной точки на расстоянии r от точечного заряда Q потенциал будет определяться выражением $\boxed{\varphi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{Q}{r}}$.

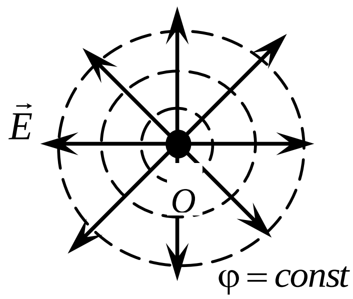
Потенциал бесконечно удаленных точек ($r = \infty$) будет равен нулю, $\varphi_\infty = 0$, поэтому потенциал в произвольной точке поля точечного заряда можно определить как работу сил электрического поля, которую они совершают при перемещении единичного положительного заряда из данной точки в бесконечность. Эта работа численно равна работе, совершаемой внешними силами (против сил электрического поля) по перемещению единичного положительного заряда из бесконечности в данную точку.

Для потенциала электрического поля справедлив **принцип суперпозиции**. *Потенциал поля системы зарядов равен алгебраической сумме потенциалов полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности*

$$\boxed{\varphi = \varphi_1 + \ldots + \varphi_n = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i}.$$

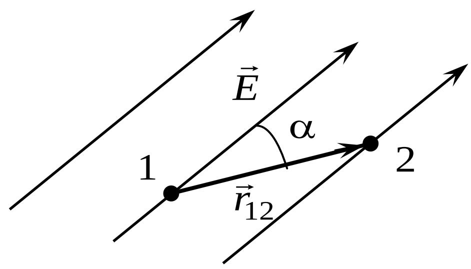
Обе введенные величины: и напряженность, и потенциал – характеризуют одно поле, естественно, они должны быть связаны между собой. Соотношение между ними, полученное из определения потенциала, является ***интегральной формой записи связи между напряженностью поля и распределением потенциала***

$$\boxed{\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -\int_{(1)}^{(2)} \vec{E}d\vec{r}}.$$



Знак минус перед интегралом указывает на то, что *потенциал убывает в направлении напряженности электрического поля*.

В направлении, перпендикулярном силовым линиям (вектору напряженности поля), потенциал не меняется. Поэтому поверхность, перпендикулярная силовым линиям электрического поля, называется **эквипотенциальной поверхностью** – *поверхностью постоянного потенциала*.



Если **электрическое поле однородно**, то есть *его напряженность* $\vec{E}$ *одинакова во всех точках поля по величине и направлению*, то $\vec{E}$ можно вынести из-под знака интеграла

$\Delta\varphi = -\vec{E}\int_{(1)}^{(2)} d\vec{r} = -\vec{E}\,\vec{r}_{12} = -Ed\cos\alpha$, где $\vec{r}_{12}$ – вектор, соединяющий точку 1 с точкой 2, $d = |\vec{r}_{12}|$, α – угол между $\vec{E}$ и $\vec{r}_{12}$. Если $\vec{r}_{12} \uparrow\uparrow \vec{E}$, то мы получим выражение, определяющее разность потенциалов в однородном поле вдоль силовой линии между точками на расстоянии d друг от друга

$$\Delta\varphi = -Ed \quad \text{или} \quad |\Delta\varphi| = Ed.$$

Если мы вычислим работу сил электрического поля при перемещении единичного положительного заряда по замкнутой траектории, то есть когда точка 1 совпадает с точкой 2 и, следовательно, $\varphi_1 = \varphi_2$, эта работа будет равна нулю $\Delta\varphi = 0$. (Это следствие консервативности электростатических сил.) С другой стороны, мы знаем, что $\Delta\varphi = -\int_{(1)}^{(2)} \vec{E}d\vec{r}$, следовательно, $\oint_{(l)} \vec{E}d\vec{r} = 0$. Символом $\oint$ обозначают интеграл по замкнутой области интегрирования. Мы так обозначили интеграл по замкнутой траектории (контуру) l, который называется **циркуляцией**.

Мы получили важное свойство, вытекающее из консервативности электростатических сил – *циркуляция напряженности электростатического поля равна нулю*

$$\boxed{\oint_{(l)} \vec{E}d\vec{r} = 0}.$$

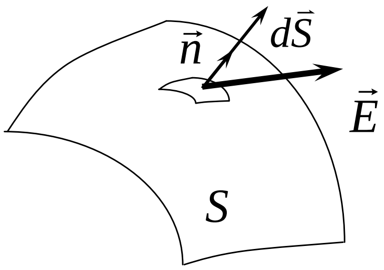
Воспользовавшись принципом суперпозиции, можно вычислить напряженность электрического поля, создаваемого произвольной системой точечных зарядов в любой точке пространства. Однако за исключением самых простых систем вычислить эту сумму (или интеграл в случае протяженных тел) крайне сложно и, чаще всего, получить аналитическое выражение не удается.

В то же время рассчитать поле ряда сложных, но симметричных систем зарядов, можно без применения принципа суперпозиции, используя **теорему Гаусса** (K. Gauß, 1777–1855), которая устанавливает более общую связь между зарядом и полем и занимает важное место в электростатике.

Прежде чем перейти к теореме Гаусса, введем понятие потока.

Элементарным потоком $d\Phi$ вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$ через элементарную площадку dS называют физическую величину

$$\boxed{d\Phi = EdS\cos\alpha},$$



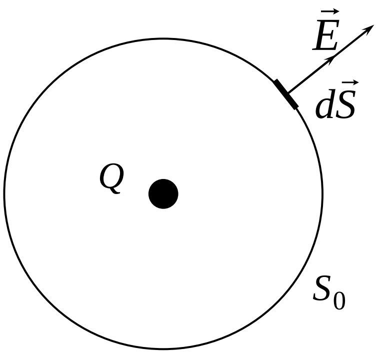
где α – угол между вектором $\vec{E}$ и нормалью $\vec{n}$ к площадке dS. Здесь $\vec{n}$ – единичная нормаль ($|\vec{n}| = 1$).

Если ввести вектор $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$, то поток можно выразить как скалярное произведение

$$\boxed{d\Phi = \vec{E}d\vec{S}}.$$

Поток через произвольную поверхность S, которую можно представить совокупностью элементарных площадок, равен *сумме элементарных потоков и выражается интегралом*

$$\boxed{\Phi = \int\limits_{(S)} d\Phi = \int\limits_{(S)} \vec{E}d\vec{S}}.$$



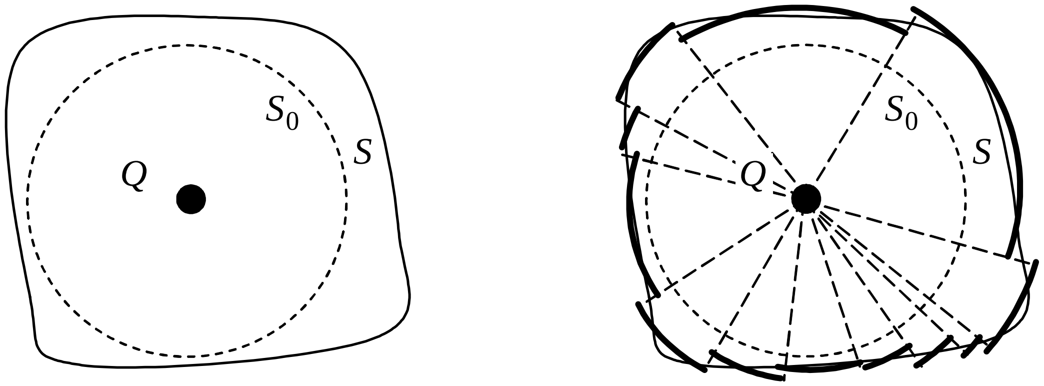
Найдем поток вектора напряженности $\vec{E}$ через произвольную замкнутую поверхность S, окружающую точечный заряд Q. Для этого сначала найдем поток через сферу S_0 радиусом R с центром в точке, где расположен заряд

$$\Phi = \oint\limits_{(S_0)} \vec{E}d\vec{S} = \oint\limits_{(S_0)} EdS\cos\alpha = \oint\limits_{(S_0)} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}dS,$$

так как $\alpha = 0$ и $\cos\alpha = 1$. Кроме того, $r = R$ для точек сферы S_0, следовательно, $\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\oint\limits_{(S_0)} dS$. Так как $\oint\limits_{(S_0)} dS$ – площадь поверхности сферы, равная $4\pi R^2$, мы получим **поток через сферу** $\Phi = \oint\limits_{(S_0)} \vec{E}d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$.

Как мы видим, поток через сферу не зависит от радиуса сферы.

Найдем теперь поток через произвольную замкнутую поверхность S, которую мы можем представить как совокупность участков сфер, причем тем точнее, чем меньше участки мы возьмем.



Суммарный поток через эти участки, с одной стороны, будет равен потоку через поверхность S. С другой стороны, он будет равен суммарному потоку через участки, которые в совокупности образуют сферу S_0. Таким образом, поток через произвольную замкнутую поверхность S будет равен потоку через сферу S_0, в центре которой расположен создающий поле заряд. Поток через такую сферу мы нашли, следовательно, поток через произвольную замкнутую поверхность будет равен

$$\boxed{\Phi = \oint\limits_{(S)} \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}}.$$

Результат не зависит от местоположения заряда. Заряд Q может быть расположен в любой точке внутри поверхности S. Более того, если внутри поверхности находится не один заряд, а система зарядов Q_i, то поток электрического поля системы зарядов будет равен сумме потоков, то есть

$$\oint\limits_{(S)} \vec{E} d\vec{S} = \Phi = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i = \sum_{i=1}^{n} \oint\limits_{(S)} \vec{E}_i d\vec{S}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{\varepsilon_0}.$$

Мы доказали **т е о р е м у   Г а у с с а**. *Поток вектора напряженности электрического поля через произвольную замкнутую поверхность S равен суммарному заряду, находящемуся внутри поверхности, деленному на электрическую постоянную*

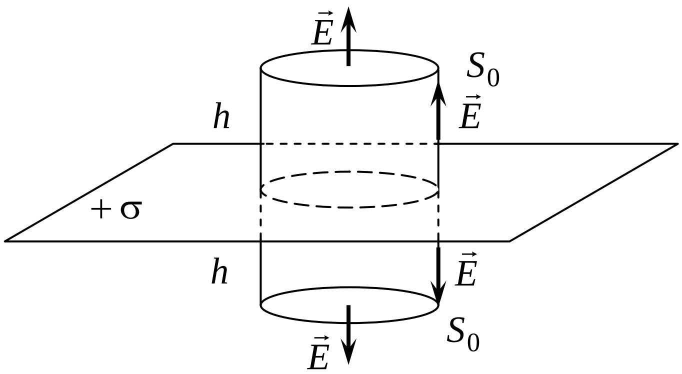
$$\boxed{\oint\limits_{(S)} \vec{E} d\vec{S} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Q_i}{\varepsilon_0}}.$$

Если ввести плотность заряда $\rho(x, y, z,) = \dfrac{dq}{dV}$ – заряд единицы объема, то $\sum_{i=1}^{n} Q_i = \int\limits_{(V)} \rho dV$, где интегрирование ведется по объему V внутри замкнутой поверхности S. Тогда теорему Гаусса можно записать в виде

$$\boxed{\oint\limits_{(S)} \vec{E}d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int\limits_{(V)} \rho(x, y, z,)dV}.$$

Как мы уже отмечали, теорема Гаусса важна не только теоретически, она позволяет легко найти напряженность электрического поля для симметричного распределения зарядов.

Воспользуемся теоремой Гаусса при нахождении поля, создаваемого **бесконечной равномерно заряженной плоскостью с поверхностной плотностью заряда** $+\sigma$. **Поверхностной плотностью заряда** называют *заряд единицы площади заряженной поверхности*.



В качестве гауссовой поверхности выберем цилиндр с направляющими, перпендикулярными заряженной плоскости, площадью оснований S_0, отстоящих от плоскости на расстоянии h. Найдем поток вектора напряженности через поверхность цилиндра, который будет равен сумме потоков через основания и боковую поверхность

$$\oint\limits_{(S)} \vec{E}d\vec{S} = \int\limits_{(S_{осн1})} \vec{E}d\vec{S} + \int\limits_{(S_{осн2})} \vec{E}d\vec{S} + \int\limits_{(S_{бок})} \vec{E}d\vec{S}.$$

Вектор $\vec{E}$ может быть направлен только *перпендикулярно плоскости* (плоскость безгранична и с любой стороны от произвольной точки на поверхности расположен одинаковый заряд) и *от плоскости* (плоскость заряжена положительно). Тогда на боковой поверхности – $\vec{E}\perp d\vec{S}$, а на основаниях – $\vec{E} \uparrow\uparrow d\vec{S}$. Следовательно, на боковой поверхности $\vec{E}d\vec{S} = 0$, и поток через боковую поверхность будет равен нулю. Полный поток будет равен потоку через основания, на которых $\vec{E}d\vec{S} = EdS$.

Все точки оснований эквивалентны, они ничем не отличаются друг от друга (как и все точки, находящиеся на одинаковом расстоянии от плоскости, так как плоскость безгранична). Это значит, что в любой точке оснований напряженность поля одинакова, и ее можно вынести за знак интеграла.

Учитывая все перечисленное, получим

$$\oint\limits_{(S)} \vec{E}d\vec{S} = \int\limits_{(S_{осн1})} \vec{E}d\vec{S} + \int\limits_{(S_{осн2})} \vec{E}d\vec{S} = E \int\limits_{(S_{осн1})} dS + E \int\limits_{(S_{осн2})} dS = 2ES_0,$$

поскольку интеграл от dS равен площади поверхности интегрирования. Мы вычислили поток *по определению потока*.

С другой стороны, *по теореме Гаусса*, поток равен суммарному заряду σS_0 участка заряженной плоскости площадью S_0 внутри цилиндра, деленному на ε_0. Тогда

$$\oint\limits_{(S)} \vec{E}d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} Q_i = \frac{\sigma S_0}{\varepsilon_0}.$$

Приравнивая правые части полученных выражений для потока, найдем **величину напряженности электрического поля плоскости**

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}.$$

Вектор напряженности, как мы уже отмечали, перпендикулярен плоскости и направлен от нее, если заряд плоскости положительный, и к ней – если отрицательный.

Мы получили, что напряженность поля одинакова во всех точках поля по величине и направлению, таким образом, *электрическое поле бесконечной заряженной плоскости является однородным*.

Рассмотрим другую простую, но важную систему зарядов – **диполь**.

Электрическим диполем называется *система двух одинаковых по величине разноименных точечных зарядов* $+q$ *и* $-q$, *расположенных на расстоянии* l *друг от друга.*

Прямая, проходящая через оба заряда, называется **осью диполя**. Расстояние l между зарядами диполя называют **плечом диполя**.

Основная характеристика диполя, называемая его **дипольным моментом**, равна

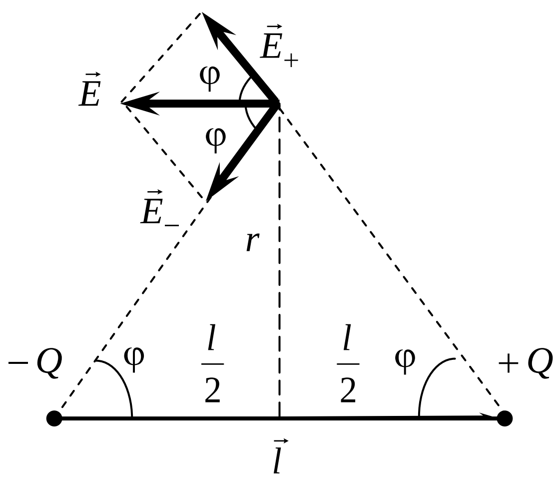
$$\boxed{\vec{p} = q\vec{l}},$$

где $\vec{l}$ – вектор, проведенный от отрицательного заряда к положительному заряду. Дипольный момент $\vec{p}$ направлен по оси диполя также от отрицательного заряда к положительному.

Дипольным моментом обладают многие молекулы, например, двухатомная молекула CO (атом C имеет небольшой положительный заряд, а O – небольшой отрицательный заряд), несмотря на то, что молекула в целом нейтральна.

Найдем электрическое поле, создаваемое диполем.

Сначала рассмотрим точку, расположенную на серединном перпендикуляре, на расстоянии r от оси диполя. Расстояние от каждого заряда равно $\sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}}$. Напряженность поля, создаваемая одним зарядом, $E_+ = E_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2 + \frac{l^2}{4}}$. Результирующее поле найдем, воспользовавшись принципом суперпозиции $\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$. Составляющие напряженностей, перпендикулярные диполю, взаимно уничтожаются. Тогда величина напряженности поля, создаваемого системой двух зарядов, будет равна



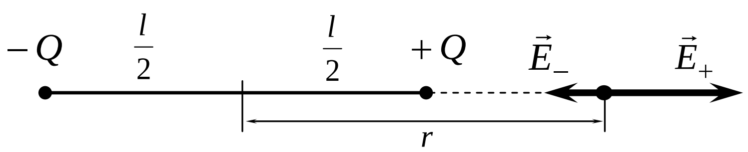
$$E = 2E_+ \cos\varphi = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2 + \frac{l^2}{4}}\,\frac{l}{2\sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}}}$$

или $$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ql}{\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{3/2}}}.$$

П о л е   д и п о л я   н а   п е р п е н д и к у л я р е, восстановленном к оси диполя из его середины, в точке на расстоянии от диполя $r >> l$ имеет напряженность

$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}}.$$

Найдем поле диполя в точках на оси диполя.



Результирующее поле, создаваемое двумя зарядами на прямой, соединяющей эти заряды, по принципу суперпозиции будет равно

$$E = E_+ - E_- .$$

В точке, удаленной от центра диполя на расстоянии r, напряженности полей будут равны

$$E_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} \text{ и } E_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2}.$$

Тогда $$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{Q}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2}\right] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r^2 + rl + \frac{l^2}{4} - r^2 + rl - \frac{l^2}{4}}{\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)^2}.$$

Упрощая и записывая $Ql = p$, получаем поле двух зарядов

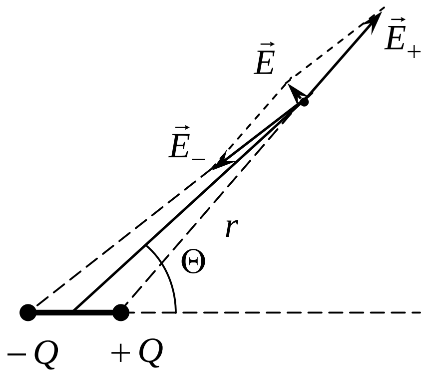
$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2pr}{\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)^2}}.$$

П о л е   д и п о л я   н а   е г о   о с и в точке, удаленной на расстояние $r >> l$,

$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{r^3}}.$$

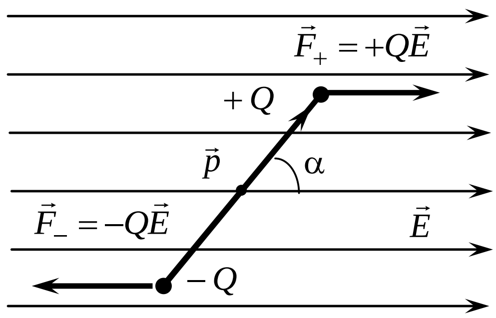
В произвольной точке поле диполя имеет величину

$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}\sqrt{3\cos^2\Theta + 1}}.$$



Если внешнее поле не равно нулю, оно будет действовать на заряды диполя. Рассмотрим поведение диполя во внешнем электрическом поле.

Сначала диполь $\vec{p}$ поместим в *однородное электрическое поле* $\vec{E}$. Силы, действующие на положительный заряд $\vec{F}_+ = +Q\vec{E}$ и отрицательный $\vec{F}_- = -Q\vec{E}$, не создают результирующей силы. Однако они приводят к возникновению вращающего момента, величина которого относительно середины диполя равна



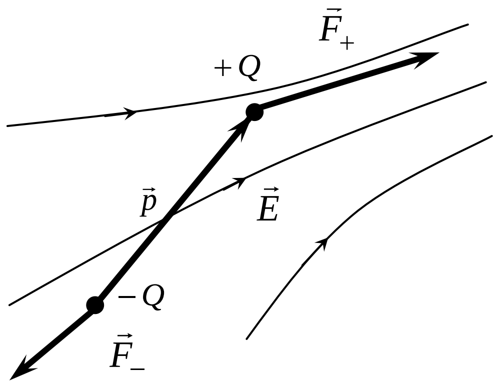
$$M = QE\frac{l}{2}\sin\alpha - QE\frac{l}{2}(-\sin\alpha) = pE\sin\alpha$$

или в векторном виде

$$\boxed{\vec{M} = [\vec{p}, \vec{E}]}.$$

Под действием вращающего момента диполь стремится повернуться так, чтобы его дипольный момент был направлен по электрическому полю.

Если диполь поместить в *неоднородное электрическое поле*, то силы, действующие на заряды $\vec{F}_-$ и $\vec{F}_+$, могут оказаться неодинаковыми по величине, и тогда на диполь, кроме вращающего момента, будет действовать результирующая сила



$$\vec{F} = \vec{F}_- + \vec{F}_+ \neq 0.$$

Тема: **Электрическое поле в веществе**

Вопросы:
1. *Диэлектрики в электрическом поле. Поляризация диэлектриков. Электрическое поле в диэлектрике.*
2. *Связанные заряды. Теорема Гаусса для диэлектриков.*
3. *Вектор электрического смещения.*
4. *Проводники в электрическом поле. Электрическое поле в проводниках.*
5. *Электрическая емкость проводников. Конденсатор.*
6. *Энергия, запасенная конденсатором.*
7. *Силы, действующие на пластины конденсатора.*

До сих пор мы рассматривали электрическое поле в пустом пространстве. Если в электрическое поле внести вещество, то свойства вещества изменятся, и поле внутри него будет отличаться от поля снаружи. Это связано с тем, что в атомах или молекулах всех веществ находятся положительные заряды (ядра) и отрицательные заряды (электроны), которые реагируют на электрическое поле.

Рассмотрим, что происходит с электрическим полем в веществе.

Результат будет разным, в зависимости от того, диэлектриком или проводником является вещество.

Диэлектриками (или изоляторами) называются вещества, *не имеющие свободных зарядов, способных передвигаться в электрическом поле*.

Все диэлектрики делятся на три класса.

1. ***Полярные диэлектрики*** состоят из полярных атомов или молекул, обладающих дипольными моментами в отсутствии электрического поля. Такими молекулами являются все несимметричные молекулы, например, CO_2, H_2O и т. п., в которых отрицательный заряд несколько смещен к одному из атомов.
2. ***Неполярные диэлектрики*** состоят из неполярных (симметричных) молекул, например, O_2, H_2 и т. п., или атомов, которые не имеют дипольного момента в отсутствии электрического поля, так как центры положительного и отрицательного зарядов совпадают.
3. ***Ионные диэлектрики*** – кристаллические вещества, состоящие из положительных и отрицательных ионов, например, $NaCl$.

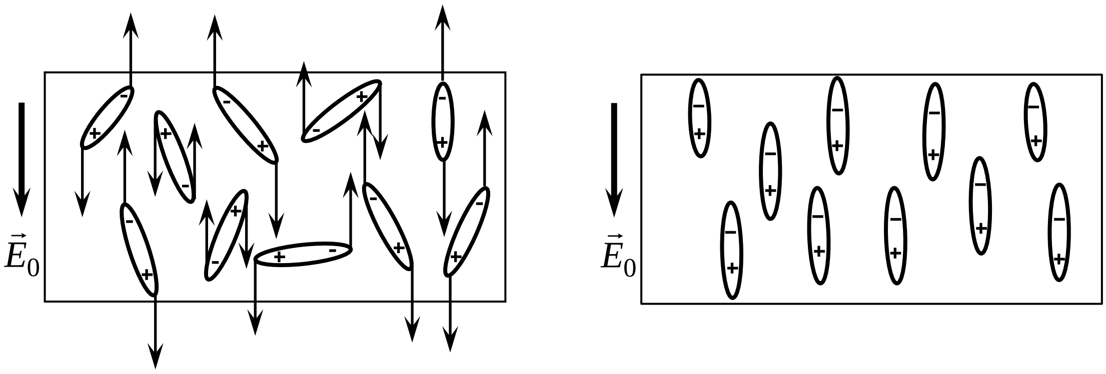
Мы здесь будем считать, что электроны находятся относительно ядер в покое в некоторых точках, полученных усреднением положений электронов во времени. Тогда дипольным моментом атома (молекулы) будет $p = ql = q\langle r \rangle$, где $\langle r \rangle$ – усредненное по времени расстояние между центрами положительных и отрицательных зарядов.

В отсутствии внешнего электрического поля дипольные моменты молекул диэлектрика либо равны нулю (неполярные молекулы), либо ориентированы хаотически (полярные молекулы). В обоих случаях суммарный дипольный момент диэлектрика равен нулю, так же как и **поляризованность диэлектрика** $\vec{P}$, которая определяется как *дипольный момент единицы объема*

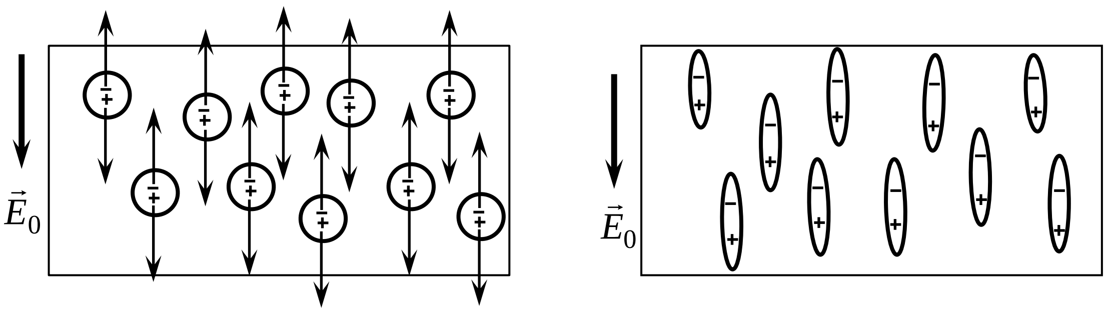
$$\boxed{\vec{P} = \frac{1}{\Delta V}\sum_{\Delta V}\vec{p}}.$$

Если мы поместим диэлектрик в электрическое поле $\vec{E}_0$, суммарный дипольный момент диэлектрика и поляризованность станут отличными от нуля.

а) В полярных диэлектриках существующие диполи будут стремиться повернуться под действием вращающего момента электрических сил по полю. Это явление называется ***ориентационной поляризацией*** диэлектриков.

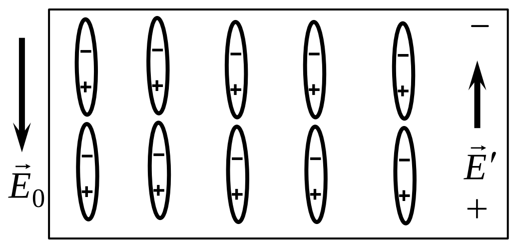


б) В случае неполярных диэлектриков в электрическом поле произойдет деформация распределения зарядов. Отрицательные заряды – электроны сместятся против поля, а положительные – сместятся по полю, хотя значительно меньше, поскольку более тяжелые. Это явление называется ***электронной (деформационной) поляризацией*** диэлектриков.



в) В случае ионных диэлектриков произойдет смещение положительных ионов кристаллической решетки (по полю) и отрицательных ионов (против поля) – ***ионная поляризация***.

Диполи, ориентированные при поляризации по полю, образуют нескомпенсированные заряды на поверхности диэлектрика (внутри диэлектрика заряд будет равен нулю), которые создадут собственное электрическое поле $\vec{E}'$, направленное в противоположную сторону по отношению к внешнему электрическому полю $\vec{E}_0$.



Величина напряженности собственного поля диэлектрика пропорциональна суммарной напряженности $E' = \chi E$, коэффициент пропорциональности χ, который зависит от свойств диэлектрика, называют **диэлектрической восприимчивостью вещества**.

Электрическое поле внутри диэлектрика будет равно сумме внешнего и внутреннего полей

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'.$$

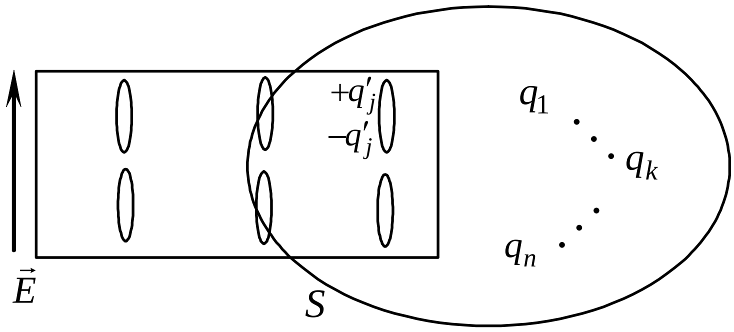
Величина напряженности суммарного поля будет меньше напряженности внешнего поля $E = E_0 - E' < E_0$. Тогда

$$E = E_0 - E' = E_0 - \chi E \quad \text{или} \quad \boxed{E = \frac{E_0}{1+\chi} = \frac{E_0}{\varepsilon}}.$$

Величина $\boxed{\varepsilon = 1 + \chi = \frac{E_0}{E}}$, показывающая, *во сколько раз поле внутри диэлектрика меньше внешнего поля*, зависит от свойств диэлектрика и называется **диэлектрической проницаемостью вещества**. Диэлектрическая проницаемость диэлектриков всегда больше единицы. Все диэлектрики ослабляют электрические поля.

Заряды, входящие в состав молекул диэлектрика, называются **связанными**, так как они не могут передвигаться под действием электрического поля.

Теорема Гаусса для напряженности электрического поля в веществе будет такой же, как и в свободном пространстве, – поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри поверхности зарядов, деленной на ε_0



$$\oint\limits_{(S)} \vec{E}d\vec{S} = \frac{\sum\limits_{(внутри\ S)} q_i}{\varepsilon_0}.$$

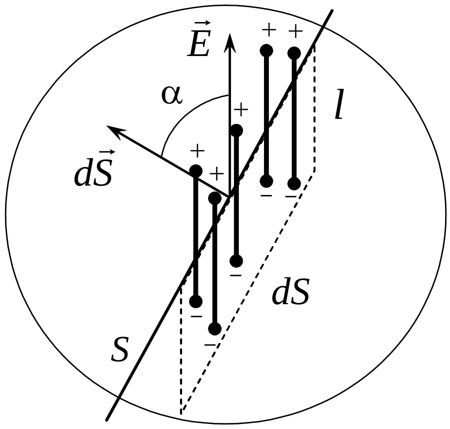
Только при наличии диэлектрика нужно учитывать и связанные заряды диэлектрика q'_j, и сторонние (внешние по отношению к диэлектрику или другие несвязанные с атомами диэлектрика) заряды q_k, находящиеся внутри S.

Вычислим поток вектора напряженности $\vec{E}$ по теореме Гаусса

$$\oint\limits_{(S)} \vec{E}d\vec{S} = \frac{\sum\limits_{(внутри\ S)} q_i}{\varepsilon_0} = \frac{\sum\limits_{\substack{(связ.заряды\\ внутри\ S)}} q'_j}{\varepsilon_0} + \frac{\sum\limits_{\substack{(стор.заряды\\ внутри\ S)}} q_k}{\varepsilon_0}.$$

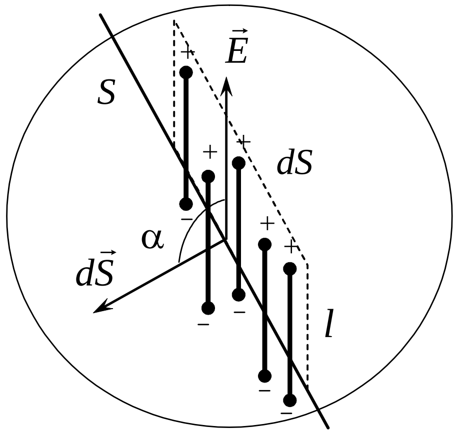
Найдем $\sum\limits_{\substack{(связ.заряды\\ внутри\ S)}} q'_j$ – *сумму связанных зарядов внутри поверхности* S.

Поскольку диполи нейтральны, то диполи, полностью находящиеся внутри поверхности, дадут нулевой вклад в эту сумму. Ненулевой вклад дадут только диполи, которые перерезаются поверхностью S. Найдем количество зарядов, расположенных внутри поверхности и принадлежащих перерезаемым диполям. Будем считать, что все диполи ориентированы по полю. Число dn интересующих нас зарядов под площадкой поверхности dS есть число зарядов (принадлежащих перерезаемым диполям), находящихся в косом цилиндре площадью основания dS, высотой $l\cos\alpha$ и объемом $V = dS \cdot l\cos\alpha$, где l – плечо диполя. Если n_0 – концентрация диполей (число молекул в единице объема), то $dn = n_0 V = n_0 dSl\cos\alpha$.



Если площадка dS расположена так, что внутри косого цилиндра находятся отрицательные заряды $-q$, то их суммарный заряд будет равен $dq'_{связ} = -qdn$ или

$$dq'_{связ} = -qln_0 dS\cos\alpha = -pn_0 dS\cos\alpha.$$



Если площадка расположена так, что в косом цилиндре находятся положительные заряды q, тогда угол α между внешней нормалью и напряженностью поля $\vec{E}$ – тупой, $\cos\alpha$ – меньше нуля, и мы получим

$$dq'_{связ} = qdn = -qln_0 dS\cos\alpha = -pn_0 dS\cos\alpha.$$

Поскольку pn_0 – дипольный момент единицы объема, или поляризованность, $pn_0 = P$, то мы имеем $dq'_{связ} = -PdS\cos\alpha$ или, переходя к векторам,

$$\boxed{dq'_{связ} = -\vec{P}d\vec{S}}.$$

Тогда ***суммарный связанный заряд***

$$\sum_{\substack{(связ.заряды \\ внутри\ S)}} q'_j = \oint_{\substack{(по\ объему \\ внутри\ S)}} dq'_{связ} = -\oint_{(S)} \vec{P}d\vec{S}$$

и ***поток напряженности электрического поля*** будет равен

$$\oint_{(S)} \vec{E}d\vec{S} = \frac{\sum\limits_{\substack{(связ.заряды \\ внутри\ S)}} q'_j}{\varepsilon_0} + \frac{\sum\limits_{\substack{(стор.заряды \\ внутри\ S)}} q_k}{\varepsilon_0} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\oint \vec{P}d\vec{S} + \frac{Q_{стор}}{\varepsilon_0}.$$

Здесь мы обозначили $Q_{стор} = \sum\limits_{\substack{(стор.заряды \\ внутри\ S)}} q_k$ суммарный сторонний заряд, расположенный внутри поверхности S. Перенося первое слагаемое правой части в левую часть и умножив на ε_0, получим

$$\boxed{\oint\limits_{(S)}(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P})d\vec{S}=Q_{стор}}.$$

Появилась новая характеристика электрического поля – **э л е к т р и ч е с к о е с м е щ е н и е**

$$\boxed{\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}}.$$

Теорема Гаусса для вектора электрического смещения имеет вид

$$\boxed{\oint\limits_{(S)}\vec{D}d\vec{S}=Q_{стор}}.$$

Введенная новая величина $\vec{D}$ описывает *поле, создаваемое только несвязанными (сторонними) зарядами*. В отличие от напряженности $\vec{E}$ электрическое смещение $\vec{D}$ не зависит от свойств среды.

В ***однородных изотропных средах*** (веществах) $\boxed{\vec{P}=\chi\varepsilon_0\vec{E}}$. Подставляя выражение для поляризованности в определение электрического смещения, получим

$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\chi\varepsilon_0\vec{E}=\varepsilon_0(1+\chi)\vec{E}=\varepsilon_0\varepsilon\vec{E}.$$

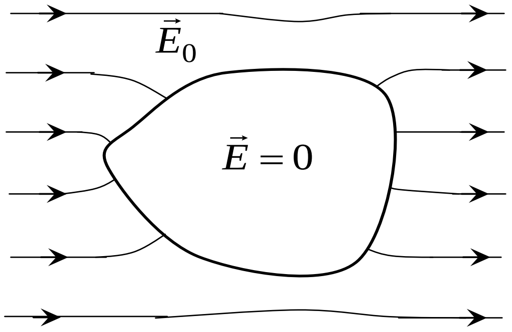
Мы воспользовались определением **д и э л е к т р и ч е с к о й п р о н и ц а е м о с т и с р е д ы** $\varepsilon=1+\chi$, которая, показывая, во сколько раз электрическое поле ослабляется однородной изотропной средой, характеризует свойства диэлектрика поляризоваться в электрическом поле.

Для этих сред вектор *электрического смещения пропорционален напряженности электрического поля*

$$\boxed{\vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon\vec{E}}.$$

Другим типом среды является **п р о в о д н и к**, *имеющий большое количество свободных зарядов*. В проводнике носители заряда *способны перемещаться под действием сколь угодно малой силы*. К проводникам относятся металлы, электролиты, плазма и т. п. Мы будем говорить только о металлических проводниках, носителями заряда в которых являются свободные электроны.

Если металл поместить в электрическое поле, то под действием электрических сил носители заряда будут перемещаться до тех пор, пока созданное в результате их перераспределения внутреннее поле $\vec{E}'$ не компенсирует внешнее поле $\vec{E}_0$, после чего суммарное поле $\vec{E}=\vec{E}'+\vec{E}_0$ внутри проводника станет равным нулю, и движение зарядов прекратится. В металлах это происходит за время $\tau\approx10^{-8}-10^{-6}\,c$.



Поскольку внутри проводника поля нет, $\vec{E}=0$, то потенциал проводника постоянен, и поверхность металла является эквипотенциальной поверхностью. Следовательно, при внесении проводника во внешнее поле, оно будет искажаться, поскольку напряженность поля вблизи поверхности металла становится перпендикулярной поверхности.

Мы рассмотрели незаряженный проводник. Если металлическому проводнику сообщить некоторый заряд Q, то электроны под действием сил отталкивания распределятся на максимальном расстоянии друг от друга по поверхности проводника. В результате поле внутри заряженного проводника станет равным нулю, но его *потенциал не будет равен нулю, даже в отсутствии внешнего поля*.

Потенциал уединенного сферического проводника радиуса R, *находящегося в вакууме*, будет равен

$$\boxed{\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}}.$$

В однородной изотропной среде с проницаемостью ε потенциал уединенного сферического проводника равен

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{Q}{R}.$$

Потенциал произвольного проводника пропорционален заряду на поверхности проводника

$$\boxed{\varphi = \frac{1}{C}Q}.$$

Величина C, *обратная коэффициенту пропорциональности*, называется **электроемкостью проводника**.

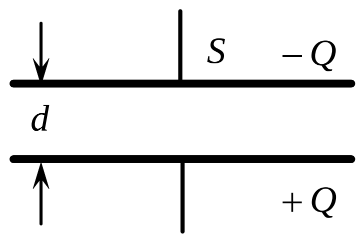
Электроемкость проводника зависит от формы и геометрических размеров проводника и характеризует его способность накапливать заряд.

Электроемкость уединенного сферического проводника *в вакууме* равна

$$\boxed{C = 4\pi\varepsilon_0 R}.$$

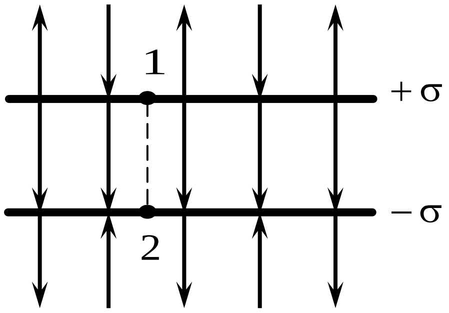
В однородной изотропной среде с проницаемостью ε электроемкость уединенного сферического проводника равна

$$\boxed{C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}.$$



Рассмотрим *устройство, которое может быть использовано для накопления заряда и энергии* – **конденсатор**, состоящий из двух металлических проводников, заряженных одинаковыми по величине разноименными зарядами $+Q$ и $-Q$. Простейшим конденсатором является ***плоский конденсатор***, в котором проводники представляют собой плоские пластины (обкладки конденсатора) площадью S, расположенные на малом расстоянии d друг от друга. Заряд пластин характеризуется поверхностной плотностью $+\sigma = \frac{+Q}{S}$ и $-\sigma = \frac{-Q}{S}$. Поскольку пластины близко расположены друг к другу, то вдали от краев их можно считать бесконечными.

Напряженность поля, создаваемого бесконечной плоскостью, мы находили. Поле однородно и напряженность по величине равна $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.



Используя принцип суперпозиции для двух пластин, получим, что напряженность поля снаружи конденсатора равна нулю

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = 0,$$

а поле внутри конденсатора будет ненулевым и тоже однородным, его напряженность равна

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Если между обкладками поместить диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε, то поле станет в ε раз меньше $\boxed{E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}}$.

Зная напряженность поля, легко найти разность потенциалов между пластинами конденсатора

$$\boxed{\varphi_2 - \varphi_1 = -\int_{(1)}^{(2)} \vec{E} d\vec{l} = -\int_{(1)}^{(2)} E dl = -Ed}.$$

Подставив напряженность и выразив плотность заряда, получим

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{Qd}{\varepsilon\varepsilon_0 S}.$$

Коэффициент пропорциональности между зарядом пластин конденсатора и разностью потенциалов между ними называют **электроемкостью (емкостью) конденсатора**

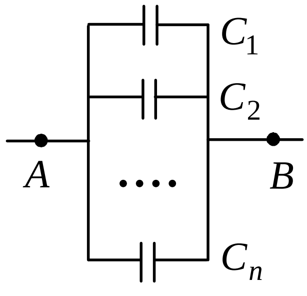
$$\boxed{Q = C\Delta\varphi}.$$

Здесь и до конца этой темы заряд и разность потенциалов мы будем брать по модулю, поскольку нам не важно, на какой обкладке положительный заряд и потенциал, а на какой отрицательный. Нас будет интересовать только величина заряда и разности потенциалов.

Исходя из определения, находим **емкость плоского конденсатора**

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}}.$$

Если конденсаторы соединить параллельно, то это аналогично увеличению площади пластин, а следовательно, емкости. Найдем *эквивалентную емкость батареи* n *параллельно соединенных конденсаторов*.



Разность потенциалов между обкладками всех конденсаторов будет одинаковой – $\Delta\varphi$. Заряд пластины эквивалентного конденсатора должен быть таким же, как у всей батареи

$$Q = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n.$$

Выражая заряд через разность потенциалов и емкость, получим

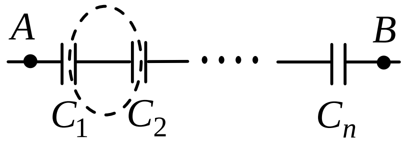
$$C\Delta\varphi = C_1\Delta\varphi + C_2\Delta\varphi + \ldots + C_n\Delta\varphi.$$

Откуда **емкость батареи параллельно соединенных конденсаторов**

$$\boxed{C = C_1 + C_2 + \ldots + C_n}.$$

Полезно помнить, что емкость батареи параллельных конденсаторов больше большей емкости.

Если конденсаторы соединить последовательно, то это аналогично увеличению расстояния между пластинами, и, следовательно, уменьшению емкости. Найдем *эквивалентную емкость батареи* n *последовательно соединенных конденсаторов*.



Суммарный заряд на правой обкладке первого конденсатора и левой обкладке второго конденсатора (внутри пунктира) всегда равен нулю – по закону сохранения заряда, поскольку при заряде конденсатора через поверхность, окружающую эту область (пунктир), заряд не переносится. Аналогично для правой обкладки второго конденсатора и левой – третьего, и т. д. Следовательно, заряды на обкладках всех конденсаторов одинаковы по величине.

Разность потенциалов между обкладками равна сумме разностей потенциалов на каждом конденсаторе

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 + \ldots + \Delta\varphi_n.$$

Выражая разность потенциалов через заряд и емкость, получим

$$\frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \ldots + \frac{Q}{C_n}.$$

Откуда **эквивалентная емкость батареи последовательно соединенных конденсаторов**

$$\boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}}.$$

Емкость батареи последовательных конденсаторов меньше меньшей емкости.

При заряде конденсатора, поскольку внутри него создается электрическое поле, обладающее энергией, он запасает энергию, которая локализована между его обкладками.

Энергия, запасенная конденсатором, равна *работе против сил электростатического поля, затраченной на заряд конденсатора* (на перенос заряда с одной пластины на другую). В процессе заряда разность потенциалов $\Delta\varphi'$ между пластинами, создаваемая уже перенесенным зарядом q, изменяется от нуля до $\Delta\varphi$, величина заряда на пластинах q меняется от нуля до Q.

Найдем эту энергию, сложив элементарные работы $\delta A = dq \cdot \Delta\varphi'$ по переносу заряда dq между пластинами, разность потенциалов между которыми $\Delta\varphi'$

$$W = \int \delta A = \int \Delta\varphi' dq = \int\limits_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C} \int\limits_0^Q q dq = \frac{Q^2}{2C}$$ или окончательно

$$\boxed{W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{C\Delta\varphi^2}{2}}.$$

Если рассмотреть плоский конденсатор с расстояниями между пластинами d и площадью пластин S, подставить $C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$ и учесть, что $E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0 S}$, то есть $Q^2 = \varepsilon^2\varepsilon_0^2 S^2 E^2$, то получим $W = \frac{\varepsilon^2\varepsilon_0^2 S^2 E^2 d}{2\varepsilon\varepsilon_0 S} = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2 Sd = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2 V$. Здесь V – объем пространства между пластинами конденсатора, где локализовано электрическое поле. Тогда выражение

$$\boxed{\frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \frac{W}{V} = w}$$

имеет смысл объемной плотности энергии электрического поля.

Полученное здесь выражение объемной плотности энергии электрического поля справедливо в общем случае электрического поля напряженностью E.

Пластины конденсатора имеют разноименный заряд, следовательно, они притягиваются друг к другу. Пластины реального конденсатора находятся на фиксированном расстоянии, поскольку сила притяжения компенсирована внешними силами.

Найдем **силу притяжения между пластинами** – силу притяжения, с которой на одну пластину конденсатора действует другая пластина. Заряд на одной пластине Q, тогда сила притяжения должна быть равна $F = QE' = \sigma SE'$, где E' – напряженность электрического поля, в котором находится пластина. Это поле E' создает одна вторая пластина, и оно имеет напряженность $E' = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$. Следовательно, сила равна

$$F = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Выражая плотность заряда $\sigma = \varepsilon\varepsilon_0 E$ через напряженность поля внутри конденсатора, создаваемого обеими пластинами $E = 2E' = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$, получим

$$\boxed{F = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2 S}.$$

Если между пластинами конденсатора помещен диэлектрик, тогда он будет испытывать **давление**

$$\boxed{P = \frac{F}{S} = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2 = w}.$$

Тема: **Электрический ток**

Вопросы:
1. *Электрический ток. Характеристики электрического тока.*
2. *Электродвижущая сила (ЭДС).*
3. *Закон Ома для однородного участка цепи. Электрическое сопротивление.*
4. *Закон Ома для неоднородного участка цепи. Обобщенный закон Ома. Закон Ома для замкнутой цепи.*
5. *Тепловое действие тока. Закон Джоуля–Ленца.*
6. *Разветвленные цепи, правила Кирхгофа.*

В предыдущей теме мы рассмотрели взаимодействие и свойства систем неподвижных зарядов. Перед тем как перейти к взаимодействию движущихся зарядов, нужно научиться описывать их движение, чему посвящена данная тема.

Электрическим током называется *упорядоченное движение зарядов*. Ток характеризуется *направлением тока и силой тока* I.

Направление тока *совпадает с направлением движения положительных зарядов.*

Сила тока равна *величине заряда, прошедшего в единицу времени через поперечное сечение проводника*

$$\boxed{I = \frac{dQ}{dt}}.$$

Электрический ток называется **постоянным электрическим током**, если *сила тока не изменяется со временем*.

Для ***постоянного тока*** ($I = const$) $I = \frac{Q}{t}$, и в этом случае заряд, прошедший по проводнику за время t, будет равен $Q = It$.

Для более детального описания протекания заряда по проводнику вводят **плотность тока** j, равную *величине заряда, прошедшего через единицу площади поверхности, перпендикулярной направлению тока,*

$$\boxed{j = \frac{dI}{dS} = qnv}.$$

Здесь dI – сила тока, прошедшего через dS, q – заряд одного носителя заряда, n – концентрация и v – средняя скорость упорядоченного движения носителей заряда.

Если плотность тока одинакова во всех точках сечения проводника ($j = const$), то $j = \frac{I}{S}$.

Если ввести вектор, по величине равный плотности тока и направленный по движению положительных зарядов, то мы получим **вектор плотности тока**

$$\boxed{\vec{j} = qn\vec{v}}.$$

Скорость упорядоченного движения зарядов пропорциональна напряженности электрического поля, которое вызывает их движение

$$\boxed{\vec{v} = \mu\vec{E}}.$$

Коэффициент пропорциональности μ называется **подвижностью носителя заряда**. Тогда $\boxed{\vec{j} = qn\mu\vec{E} = \sigma\vec{E}}$. Величина σ называется **удельной проводимостью** металла.

Мы знаем, что электростатические поля могут только вызывать перераспределение зарядов в проводнике, которое сопровождается выравниванием потенциала, при котором движение зарядов прекращается. Для постоянного движения зарядов в проводнике требуются силы не электростатической природы.

Силы, поддерживающие постоянную разность потенциалов и обеспечивающие протекание тока, называются **сторонними силами**. Под действием сторонних сил электрические заряды движутся внутри источника против сил электростатического поля, вследствие чего на клеммах источника поддерживается постоянная разность потенциалов, и при подключении к источнику электрической цепи в ней потечет электрический ток.

Природа сторонних сил может быть различной. В гальванических элементах они возникают за счет энергии *химических* реакций, в генераторе – за счет *механической* энергии вращения ротора генератора и т. п.

Для сторонних сил $\vec{F}_{стор}$ можно ввести **напряженность поля сторонних сил** $\vec{E}_{стор} = \dfrac{\vec{F}_{стор}}{q}$. Результирующее поле в проводнике будет суммой электростатического поля $\vec{E}$ и поля сторонних сил $\vec{E}_{стор}$

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{E}_{стор}.$$

Работа сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда на участке цепи (1-2) называется **электродвижущей силой** (ЭДС), действующей на этом участке, и обозначается $\mathcal{E}_{12}$

$$\mathcal{E}_{12} = A_{стор(един)} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{E}_{стор} d\vec{l},$$

где $d\vec{l}$ – вектор, направленный по току, длина которого равна длине бесконечно малого участка цепи.

Если участок электрической цепи содержит источник ЭДС, этот участок называется **неоднородным участком цепи**. Для ***неоднородного участка цепи*** *полная работа электростатических и сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда*, называемая **напряжением**, равна

$$U = A_{12(един)} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{E}' d\vec{l} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{E}_{стор} d\vec{l} + \int_{(1)}^{(2)} \vec{E} d\vec{l} = \mathcal{E} + \varphi_1 - \varphi_2$$

или, окончательно, $\boxed{U = \mathcal{E} + \varphi_1 - \varphi_2}$.

Для ***однородного участка цепи*** (не содержащего источник ЭДС) напряжение определяется выражением

$$\boxed{U = \varphi_1 - \varphi_2}.$$

Для замкнутой цепи $\varphi_1 = \varphi_2$, поскольку работа электростатических сил в замкнутом контуре равна нулю, и напряжение равно ЭДС $U = \mathcal{E}$, то есть полная работа по перемещению заряда в замкнутой цепи равна работе сторонних сил.

Сила тока на однородном участке цепи связана с приложенным напряжением **законом Ома**, установленным в 1887 году Г. Омом (G. Ohm, 1787–1854): *если под действием сторонних сил* ***на однородном участке проводника*** *создается напряжение* U*, то на данном участке проводника протекает ток силой* I*, которая пропорциональна приложенному напряжению*

$$\boxed{I = \frac{1}{R}U} \quad \text{или, как часто записывают,} \quad \boxed{IR = U}.$$

Величина R, входящая в закон Ома, **называется электрическим сопротивлением участка проводника**.

Если к однородному участку проводника длины L и поперечного сечения S приложить напряжение U, оно создаст в проводнике однородное электрическое поле $E = \dfrac{U}{L}$, так как для однородного поля $U = -\Delta\varphi = EL$. Это поле обеспечивает протекание тока с постоянной плотностью $j = \dfrac{I}{S}$. Подставив плотность тока и напряженность в выражение $j = \sigma E$, которое является законом Ома в дифференциальной форме, получим

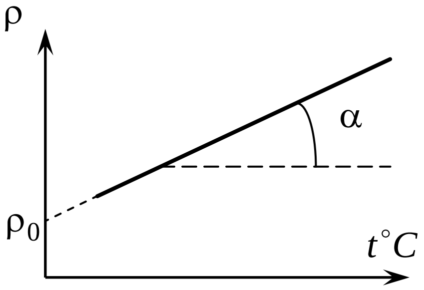
$$\frac{I}{S} = \sigma\frac{U}{L} \quad \text{или} \quad I = \sigma\frac{S}{L}U .$$

Коэффициент пропорциональности (величина обратная сопротивлению) называется **проводимостью** $\dfrac{1}{R} = \sigma\dfrac{S}{L}$.

Мы получили, что сопротивление R зависит от природных свойств проводника и от геометрических размеров участка проводника

$$\boxed{R = \frac{1}{\sigma}\frac{L}{S} = \rho\frac{L}{S}}.$$

Величина, обратная удельной проводимости $\rho = \dfrac{1}{\sigma}$, называется **удельным сопротивлением**, которое, как и удельная проводимость, зависит только от природы проводника и не зависит от его формы и размеров. По определению **удельное сопротивление материала проводника** есть *сопротивление участка проводника единичной длины и единичной площади поперечного сечения*.

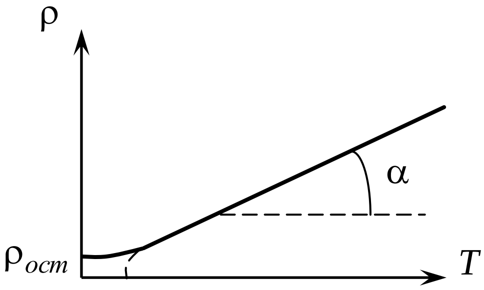


Для металлов удельное сопротивление растет с температурой. Этому не стоит удивляться, так как с ростом температуры атомы металла движутся быстрее и больше мешают упорядоченному движению электронов. В широких диапазонах температуры сопротивление увеличивается практически линейно

$$\boxed{\rho = \rho_0(1 + \alpha t)}.$$

Коэффициент α называется **температурным коэффициентом сопротивления**. Для разных металлов температурный коэффициент свой, причем значения α зависят от диапазонов температуры, поэтому при использовании табличных значений следует обращать внимание на интервал температур, для которого справедливо используемое значение.

При низких температурах наблюдается отклонение от линейного закона. Для большинства реальных металлов характерно наличие остаточного сопротивления $\rho_{ост}$ при абсолютном нуле. Это связано с наличием примеси (чужеродных атомов) в кристаллической решетке металла и ее неидеальностью (наличием дефектов кристаллической структуры).



В то же время некоторые металлы (Al, Pb, Zn, их сплавы и другие) проявляют вблизи абсолютного нуля при температурах, разных для каждого вещества ($T = 0{,}14 - 20\ K$), свойство **сверхпроводимости** – *их сопротивление становится равным нулю*. Сверхпроводимость является *макроскопическим квантовым эффектом* и объясняется на основе квантовой механики. Физическая модель сверхпроводимости была создана в 1957 году.

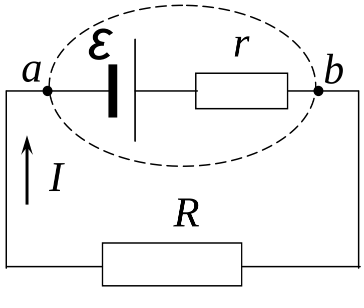
Для **неоднородного участка цепи закон Ома** принимает вид

$$I = \frac{\mathcal{E} + \varphi_1 - \varphi_2}{R}.$$

Мы можем записать **обобщенный закон Ома** в виде

$$\boxed{I = \frac{1}{R}U},$$

где $U = \mathcal{E} + \varphi_1 - \varphi_2$ *для неоднородного участка*, $U = \varphi_1 - \varphi_2$ – *для однородного участка*.



Рассмотрим *замкнутую цепь,* содержащую источник ЭДС с внутренним сопротивлением r и подключенную к источнику нагрузку сопротивлением R.

Запишем закон Ома для неоднородного участка цепи ab (внутри пунктира)

$$I = \frac{\mathcal{E} + \varphi_a - \varphi_b}{r},$$

откуда $Ir = \mathcal{E} + \varphi_a - \varphi_b$.

Запишем закон Ома для однородного участка цепи ba (снаружи пунктира)

$$I = \frac{\varphi_b - \varphi_a}{R},$$

откуда найдем $IR = \varphi_b - \varphi_a$.

Тогда $Ir + IR = \mathcal{E}$.

И мы получаем **з а к о н О м а д л я з а м к н у т о й ц е п и**

$$\boxed{I = \frac{\mathcal{E}}{r + R}}.$$

Напряжение на клеммах источника будет равно $U_{ab} = IR = \dfrac{\mathcal{E}R}{r + R}$.

При протекании тока (движении заряда) совершается работа. Для этого требуется энергия, поступление которой обеспечивается источником ЭДС.

Энергия, необходимая для переноса заряда $dq = Idt$ между точками, напряжение между которыми U, равна

$$dW = Udq = IUdt.$$

Мощность, потребляемая от источника ЭДС, $\boxed{P = \dfrac{dW}{dt} = IU}$.

Если проводник неподвижен, вся энергия идет на нагревание проводника. Тогда с учетом закона Ома

$$Q = W = \int dW = \int_0^t Pdt = \int_0^t IUdt = \int_0^t I^2(t)Rdt = \int_0^t \frac{U^2(t)}{R}dt.$$

Если *ток постоянен* ($I = const$, $U = const$), то выделяемое тепло определяется выражением

$$\boxed{Q = I^2Rt = \frac{U^2}{R}t}.$$

В этом случае тепловая мощность равна

$$\boxed{P = I^2R = \frac{U^2}{R}}.$$

Полученные выражения, описывающие тепловое действие электрического тока, носят название **з а к о н а Д ж о у л я – Л е н ц а** (J. Joule, 1818–1889, Э. Ленц, 1804–1865).

Если проводник перемещается, то часть энергии будет израсходована на совершение работы

$$A = \int Pdt - Q.$$

При постоянном токе работа будет равна $A = IUt - I^2Rt$.

При расчете электрических цепей, содержащих разветвленные неоднородные участки, использование закона Ома часто неудобно, так как расчет становится громоздким и сложным. В этих случаях применяют определенные правила расчета – **правила Кирхгофа** (G. Kirchhoff, 1824–1887), являющиеся следствием фундаментальных законов физики.

1. **Первое правило Кирхгофа – *правило узлов*.**
   Суммарная сила входящих в узел токов равна суммарной силе выходящих токов.

$$\boxed{\sum I_{вход} = \sum I_{выход}}$$

или, если считать, как это принято, *втекающие токи положительными*, а *вытекающие – отрицательными*, то *полная сумма всех токов равна нулю*

$$\boxed{\sum I_i = 0}.$$

Узлом называется *точка электрической цепи, в которой соединены более двух проводников.*

Первое правило Кирхгофа является следствием **закона сохранения заряда** – сколько заряда втекает ежесекундно в узел, столько должно и вытекать – заряд не может исчезнуть.

2. **Второе правило Кирхгофа – *правило контуров*.**
   В замкнутом контуре сумма ЭДС равна сумме падений напряжения на однородных участках

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = \sum_{k=1}^{m} I_k R_k}.$$

Второе правило Кирхгофа является следствием потенциальности электростатического поля – работа сил электростатического поля A при перемещении заряда по замкнутому контуру равна нулю. Эта работа может быть найдена на всех участках цепи, как разность полной работы электростатических и сторонних сил A' и работы сторонних сил $A_{стор}$. Тогда

$$A' - A_{стор} = 0.$$

Если перемещаемый заряд единичный и положительный, то поскольку по определению $A'_{(един)\,k} = U_k$ – падение напряжения на k-м участке цепи, а $A_{стор(един)\,i} = \varepsilon_i$ – ЭДС на k-м участке цепи, получим

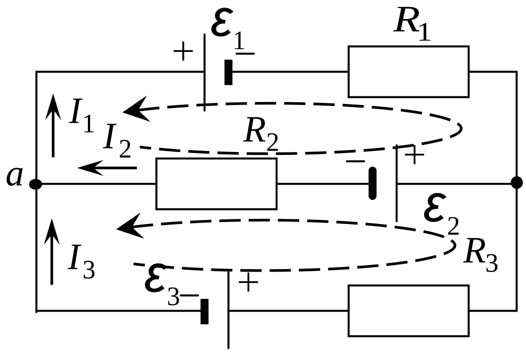
$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = \sum_{k=1}^{m} U_k}.$$

Пользуясь обобщенным законом Ома, можем записать $U_k = I_k R_k$. Тогда второе правило Кирхгофа примет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = \sum_{k=1}^{m} I_k R_k .$$

В правой части суммирование ведется по всем участкам цепи, содержащим сопротивление, в левой – по всем участкам, содержащим ЭДС.

Как пример использования правил Кирхгофа рассмотрим цепь, изображенную на рисунке.



Применим *первое правило*. Выберем направление протекания токов, как показано на рисунке. В данной схеме два узла a и b. Первое правило, в записи для этих узлов, будет отличаться только знаками токов (левая и правая части поменяются местами)

$$I_1 = I_2 + I_3.$$

При использовании *второго правила* выберем направление обхода замкнутых контуров, как указано пунктиром.

Тогда *при суммировании ЭДС* по определению нужно брать ЭДС с плюсом, если при обходе контура первым будет отрицательная клемма (минусовой полюс) источника, а затем положительная клемма (плюсовой полюс), в этом случае ЭДС создает ток, направленный в сторону обхода контура. Если полюса будут встречаться при обходе контура в обратном порядке, то ЭДС нужно брать с минусом, в этом случае ЭДС создает ток, направленный в сторону против обхода контура.

При суммировании падений напряжения на резисторах ток будем брать с плюсом, если его направление совпадает с направлением обхода, и с минусом – в противном случае. Тогда для нашей схемы получим

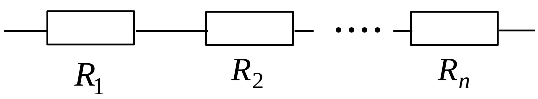
$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = -I_1R_1 - I_2R_2,$$
$$-\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 = I_2R_2 - I_3R_3 .$$

Или оба правила вместе

$$\begin{cases} \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = -I_1R_1 - I_2R_2, \\ -\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 = I_2R_2 - I_3R_3, \\ I_1 = I_2 + I_3. \end{cases}$$

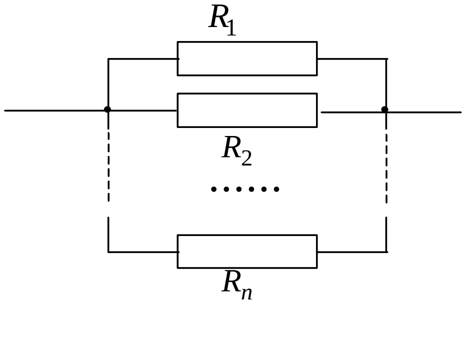
Если полученная при решении уравнений сила тока в какой-либо ветви цепи получится отрицательной, то это означает, что в данной ветви ток будет протекать в направлении, противоположном выбранному.

Для простых цепей вместо правил Кирхгофа можно использовать правила нахождения **эквивалентного сопротивления** ***при последовательном соединении резисторов***



$$\boxed{R = \sum_{i=1}^{n} R_i}$$

и ***при параллельном соединении резисторов***



$$\boxed{\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}},$$

которые могут быть получены из закона Ома или правил Кирхгофа.

Приложение А

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Контрольная работа № 1 «Механика. Электричество»

СПИСОК ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

Механика

1. Вводная лекция: а) обработка результатов физических измерений;
   б) погрешности электрических измерений и электроизмерительных приборов.
2. Определение ускорения свободного падения с помощью прибора Атвуда.
3. Исследование упругого соударения шаров.
4. Определение момента инерции твердого тела с помощью маятника Максвелла.
5. Определение момента инерции твердого тела с помощью маятника Обербека.
6. Определение скорости пули с помощью крутильного баллистического маятника.
7. Определение коэффициента трения методом наклонного маятника.

Электричество

1. Измерение удельного сопротивления нихромовой проволоки.
2. Измерение емкости конденсатора при помощи мостовой схемы на переменном токе.
3. Изучение процесса разряда конденсатора.
4. Определение ЭДС источника постоянного тока методом компенсации.
5. Исследование мощности в цепи переменного тока.

Приложение Б

СПИСОК ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трофимова Т. И. Курс физики / Т. И. Трофимова.– М. : Высшая школа, 1999, 2002.
2. Савельев И. В. Курс общей физики: в 3-х томах / И. В. Савельев.– М. : Наука, 1989.– Т. 1, 2.
3. Савельев И. В. Курс общей физики: в 5-ти книгах / И. В. Савельев. – М. : Наука, 1998.– Кн. 1, 2.
4. Яворский Б. М. Справочник по физике / Б. М. Яворский, А. А. Детлаф. – М. : Наука, 1985.
5. Детлаф А. А. Курс физики / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – М. : Высшая школа, 1999.
6. Яворский Б. М. Основы физики / Б. М. Яворский, А. А. Пинский. – М. : Наука, 1974. Т. 1.
7. Чертов А. Г. Физика: Методические указания и контрольные задания / А. Г. Чертов. – М. : Высшая школа, 1987.
8. Климовский А. Б. Сборник задач для контрольных работ по физике. Механика. Электричество. (Для студентов заочно-вечерней формы обучения) / А. Б. Климовский. – Ульяновск : УлГТУ, 2005
9. Савиновская Г. А. Механика: Методические указания к решению задач / Г. А. Савиновская. – Ульяновск : УлПИ, 1993.
10. Савиновская Г. А. Электричество: Методические указания к решению задач / Г. А. Савиновская. – Ульяновск : УлГТУ, 1994.
11. Баус В. А. Обработка результатов физических измерений: Методические указания / В. А. Баус. – Ульяновск : УлПИ, 1985.
12. Баус В. А. Обработка результатов электрических измерений: Методические указания / В. А. Баус. – Ульяновск : УлПИ, 1987.
13. Гильманов Ю. Р. Механика. Методические указания к лабораторным работам по физике / Ю. Р. Гильманов. – Ульяновск : УлГТУ, 2003.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Содержание остальных частей «Курса лекций по физике»

Часть 2

Электромагнетизм

Магнитное поле в вакууме
Магнитные свойства вещества
Уравнения Максвелла
Электромагнитные колебания

Физика волновых процессов

Волновая физика
Интерференция волн
Дифракция волн
Взаимодействие электромагнитных волн с веществом

Квантовая физика

Квантовая природа излучения
Модели атома
Элементы квантовой механики
Физика атомов и молекул

Часть 3

Основы термодинамики и молекулярной физики

Основы термодинамики
Основы молекулярной физики газов
Реальные газы и фазовые превращения

Элементы физики твердого тела

Симметрия кристаллов. Тепловые свойства кристаллов
Электрические свойства твердых тел
Электрические свойства полупроводников и полупроводниковые приборы

Физика атомного ядра и элементарных частиц

Физика атомного ядра
Физика элементарных частиц

Учебное издание

КЛИМОВСКИЙ Андрей Борисович

Курс лекций по физике
Часть 1.

МЕХАНИКА. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

Учебное пособие

Корректор Л. В. Рыжова

Подписано в печать Формат 60x84/16. Бумага писчая.
Уч.-изд. л. 5,50. Усл. печ. л. 5,81. Тираж 200 экз. Заказ .

Ульяновский государственный технический университет
432027, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, 32.

Типография УлГТУ, 432027, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, 32.